Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2024

Épreuve de Mathématiques PT – TSI

Exponentielle de matrices nilpotentes

Dans ce problème on s'intéresse au calcul d'exponentielles de matrices nilpotentes et à la résolution de systèmes différentiels.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ comme pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit les notations suivantes :

— $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désignera le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^\star$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

— L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sera noté $GL_n(\mathbb{K})$.

— I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera par $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique.

— On identifiera les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

— Soit x_1, x_2 et x_3 trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on définit $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}$.

— Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. En adoptant les notations précédentes, et en notant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$,

le système d'équations différentielles d'inconnues x_1, x_2 et x_3 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + a_{1,3}x_3(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + a_{2,3}x_3(t) \\ x_3'(t) = a_{3,1}x_1(t) + a_{3,2}x_2(t) + a_{3,3}x_3(t) \end{cases}$$

pourra donc être représenté sous forme matricielle par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

ou de façon plus condensée par $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$ que l'on qualifiera de **système différentiel**.

— On admettra que $\forall P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),\ (PX(t))' = PX'(t)$.

On définit dans ce problème $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1 Étude d'une matrice nilpotente

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $N^p = 0_n$, on dira que la matrice N est **nilpotente**.
Le plus petit entier p vérifiant $N^p = 0_n$ est appelé **indice de nilpotence** de la matrice N.
On notera par $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est nilpotente. On déterminera également son indice de nilpotence.
2. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \chi_A(\lambda) = \lambda^3$.
3. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer X_1, X_2 et X_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $AX_1 = 0$, $AX_2 = X_1$ et $AX_3 = X_2$.
   On choisira X_1, X_2 et X_3 de sorte que la 3^{e} coordonnée de X_1 soit 1 et que celle de X_2 et de X_3 soit nulle.
5. En déduire qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$, que l'on précisera, telle que $A = PTP^{-1}$.
   On vérifiera que la seconde ligne de P a pour somme -4.

6. Déterminer les solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = TX(t)$.
7. Déterminer les solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$.
8. On considère le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$.
   En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 Quelques propriétés des matrices nilpotentes

9. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ d'indice de nilpotence p. En justifiant qu'il existe $X \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $M^{p-1}X \neq 0$, montrer que la famille $(X, MX, \cdots, M^{p-1}X)$ est libre.
10. En déduire que $\forall M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}),\ M^n = 0_n$.
11. L'ensemble $\mathcal{N}_2(\mathbb{C})$ est-il un espace vectoriel ? On justifiera sa réponse.
12. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que $MN \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.
13. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que $M + N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.
14. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M a pour unique valeur propre 0. En déduire que $\det(M) = 0$.
15. Soit $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ non nulle. Montrer que N n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
16. Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Montrer que la matrice $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul sans pour autant être nilpotente.
17. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure à diagonale nulle (c'est-à-dire $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \geqslant j \Rightarrow m_{i,j} = 0$).
    En considérant $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ est M, montrer par récurrence que la propriété « $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \varphi^k(e_i) = 0$ » est vérifiée pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$.
    En déduire que $M^n = 0_n$.
18. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si M a pour unique valeur propre 0 alors M est nilpotente.

3 Exponentielle de matrices nilpotentes

> On définit l'exponentielle de $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ par $e^M = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$.

19. Soit $(M,N) \in (\mathcal{N}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $M = PNP^{-1}$. Montrer que $e^M = Pe^N P^{-1}$.
20. Montrer que $e^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
21. Soit $N \in \mathbb{N}$.
    On considère les matrices $M_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies pour chaque entier $i \in [\![0,N]\!]$ et chaque entier $j \in [\![0,N]\!]$.
    Montrer que $\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} M_{i,j} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N-i+1}^{N} M_{i,j}$ et justifier que $\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} = \sum_{s=0}^{N}\sum_{i=0}^{s} M_{i,s-i}$.
22. En déduire, en remarquant que $e^A e^B = \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!} A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!} B^j\right)$, que $e^{A+B} = e^A e^B$ lorsque A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent.
23. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. En déduire que e^M est inversible et déterminer son inverse.
24. $E = \{e^M \mid M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})\}$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

> On appelle matrice **unipotente** toute matrice s'écrivant comme somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente.

25. Montrer que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est unipotente.

4 Résolution d'un système différentiel homogène

On admet dans cette partie que : $\forall N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, $X' = NX \Leftrightarrow X \in \left\{t \mapsto e^{tN} X_0 \,|\, X_0 \in \mathbb{R}^n\right\}$.

26. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} = \begin{pmatrix} t+1 & t & 3t \\ \frac{3}{2}t^2 + 5t & \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1 & \frac{9}{2}t^2 + 6t \\ -\frac{1}{2}t^2 - 2t & -\frac{1}{2}t^2 - t & -\frac{3}{2}t^2 - 3t + 1 \end{pmatrix}$ puis retrouver la réponse à la question 8.
27. Soit :
    - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$;
    - $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$;
    - $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) + B(t)$;
    - $X_p \in \mathcal{S}$.

    Montrer que $X \in \mathcal{S} \Leftrightarrow X - X_p \in \mathcal{S}_h$.
28. On considère le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $\forall t \in \mathbb{R},\ B(t) = \begin{pmatrix} -3t^2 - t - 1 \\ -6t^2 - 2t - 4 \\ 3t^2 + 3t + 2 \end{pmatrix}$

    Déterminer une solution particulière sous la forme $X_p : t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ bt \\ ct^2 \end{pmatrix}$ avec a, b et c trois réels.

    En déduire l'ensemble des solutions du système différentiel.

Fin du sujet