Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2024

Épreuve de Mathématiques MPI – MP – PSI – PC

Exponentielle de matrices

Dans ce problème on s'intéresse au calcul d'exponentielles de matrices et à son lien avec la résolution de systèmes différentiels.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ comme pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désignera le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^\star$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sera noté $GL_n(\mathbb{K})$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera par $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique.
- On identifiera les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{K})$ désignera l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- Soit x_1, x_2 et x_3 trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on définit $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}$.
- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. En adoptant les notations précédentes, et en notant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$,

  le système d'équations différentielles d'inconnues x_1, x_2 et x_3 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + a_{1,3}x_3(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + a_{2,3}x_3(t) \\ x_3'(t) = a_{3,1}x_1(t) + a_{3,2}x_2(t) + a_{3,3}x_3(t) \end{cases}$$

  pourra donc être représenté sous forme matricielle par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

  ou de façon plus condensée par $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$ que l'on qualifiera de **système différentiel**.
- On admettra que $\forall P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),\ (PX(t))' = PX'(t)$.

1 Exemples de systèmes différentiels

On considère **dans cette partie et dans la partie 4 uniquement** les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et les trois vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AX_1, AX_2 et AX_3.
2. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire une matrice $P_A \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P_A D P_A^{-1}$.
3. Déterminer P_A^{-1}.
4. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = DX(t)$.

5. En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$.
6. Montrer que $\chi_B = (X-1)(X-2)^2$.
7. B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? On justifiera sa réponse.
8. Déterminer $P_B \in GL_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B = P_B T P_B^{-1}$.
9. Résoudre le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = TX(t)$.
10. En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = BX(t)$.

2 Exponentielle de matrices : convergence et propriétés

> Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, son coefficient en ligne i et colonne j sera noté $(A)_{i,j}$ ou $A_{i,j}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
> On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $||\cdot||_\infty$ définie par $||A||_\infty = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |A_{i,j}|$.
> On définit pour tout entier naturel k le polynôme $E_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} X^p$.
> On définit l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme étant, lorsqu'elle existe, la limite de la suite $\left(\displaystyle\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} A^p\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

11. Montrer que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ ||AB||_\infty \leqslant n\,||A||_\infty ||B||_\infty$.
12. Montrer par récurrence que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall p \in \mathbb{N}^\star,\ ||A^p||_\infty \leqslant n^{p-1} ||A||_\infty^p$.
13. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ (E_k(A))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
14. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Montrer que $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.
15. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $A = PBP^{-1}$. Montrer que $e^A = Pe^BP^{-1}$.
16. En reprenant la matrice A de la partie 1, déterminer e^A.
17. Soit A et soit B deux matrices qui commutent.
    On pose $\forall N \in \mathbb{N},\ \Delta_N = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} A^i\right)\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} B^j\right) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(A+B)^k}{k!}$.
    Montrer que $\forall N \in \mathbb{N},\ \Delta_N = \displaystyle\sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0\leqslant i\leqslant N \\ 0\leqslant j\leqslant N}} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!} A^i B^j$ et en déduire que $e^{A+B} = e^A e^B$.
18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que e^A est inversible et déterminer son inverse.

3 Calcul avec les polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres complexes deux-à-deux distinctes : λ_1, ..., λ_n.
Pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$, on définit le polynôme L_i de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ par : $L_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$
On définit alors $\widetilde{L}_f$ le **polynôme interpolateur de Lagrange** de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ aux points λ_1, ..., λ_n par :

$$\widetilde{L}_f(X) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) L_i(X)$$

$\widetilde{L}_e$ sera donc le polynôme interpolateur de Lagrange de la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ aux points λ_1, ..., λ_n.

19. Montrer que $(L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
20. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X],\ P(X) = \widetilde{L}_P(X)$.
21. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists R_k \in \mathbb{C}_{n-1}[X],\ E_k(A) = R_k(A)$.
22. Montrer que e^A est un polynôme en A.
23. Soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $M = PNP^{-1}$.
    Montrer que $\forall Q \in \mathbb{C}[X],\ Q(M) = PQ(N)P^{-1}$.
24. Soit $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Montrer que $e^D = P^{-1}\widetilde{L}_e(A)P$.
25. En déduire que $e^A = \widetilde{L}_e(A)$.

4 Résolution d'un système différentiel homogène

On admet dans cette partie que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ X' = MX \Leftrightarrow X \in \left\{t \mapsto e^{tM}X_0 \,|\, X_0 \in \mathbb{R}^n\right\}$.

Dans cette partie on considère à nouveau les matrices A, B et T telles que définies **dans la partie 1**.

26. $E = \left\{e^{tA} \,|\, t \in \mathbb{R}\right\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
27. En utilisant la question 25, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^\star,\ e^{tA} = \frac{1}{6}\left(-3e^t(A + I_3)(A - 2I_3) + e^{-t}(A - I_3)(A - 2I_3) + 2e^{2t}(A + I_3)(A - I_3)\right)$$

28. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t} + e^t - e^{2t} & e^{2t} - e^{-t} & e^t - e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ e^{2t} - e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$.
29. Retrouver la réponse à la question 5.
30. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tT} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$.
31. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t - te^{2t} & te^{2t} & e^t - (t+1)e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ te^{2t} & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$.
32. Retrouver la réponse à la question 10.

Fin du sujet