

**12 -** On écrit la forme générale des solutions de l'équation homogène ainsi :

$$x_H(t) = (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) e^{-\mu t}.$$

Établir les expressions de  $\Omega$  et de  $\mu$  en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

**13 -** Donner la forme générale des solutions  $x(t)$  de l'équation (2).

**14 -** On suppose que la masse est lâchée en  $x = 0$  sans vitesse initiale. Déterminer alors les expressions des constantes  $A$  et  $B$  en fonction de  $\Omega$ ,  $\mu$ ,  $\omega_0$  et  $g$ .

**15 -** Déterminer l'expression de la position d'équilibre,  $x_{\text{eq}}$ .

**16 -** Tracer l'allure de la solution  $x(t)$ . On fera apparaître sur le graphique : la position initiale  $x(0)$ , la position d'équilibre  $x_{\text{eq}}$ , et la pseudo-période  $T = 2\pi/\Omega$ .

**17 -** Y a-t-il une différence significative entre la période propre  $T_0$  et la pseudo-période  $T$  ? Justifier.

**18 -** Un modèle des données est représenté figure 3. En utilisant une de vos expressions précédentes, et les valeurs numériques en légende de la figure, en déduire une valeur approchée de  $Q$ .

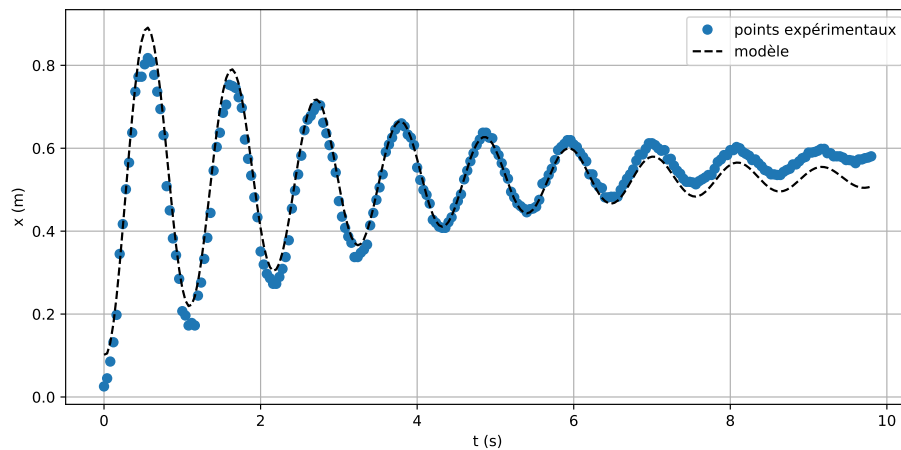


Figure 3 : données et modèle du type  $C + (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \exp(-\mu t)$ .

Le programme retourne, en unités cohérentes SI :

$\Omega = 5.83$ ,  $\mu = 0.30$ ,  $A = -0.43$ ,  $B = -0.059$ ,  $C = 0.53$ .

**19 -** Un second modèle, présenté figure 4, est en meilleur accord avec les données. Proposer une cause physique possible à l'existence du terme supplémentaire en  $D \times t$ .

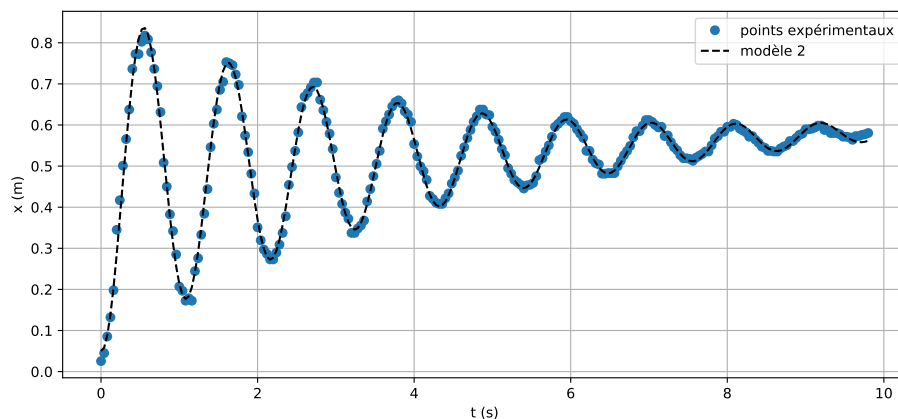


Figure 4 : données et modèle du type

$C + (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) \exp(-\mu t) + D \times t$ .

Le programme retourne, en unités cohérentes SI :

$\Omega = 5.82$ ,  $\mu = 0.29$ ,  $A = -0.42$ ,  $B = -0.037$ ,  $C = 0.47$ ,  $D = 0.011$ .

### III Étude en régime sinusoïdal forcé

En 1940, Clark et Katz modifient la méthode de Rüchardt afin d'en améliorer la précision. Ils obtiennent des valeurs de  $\gamma$  associées à des incertitudes relatives de l'ordre de 0,1 %, et qui serviront de référence pour la dizaine d'années qui suivent.

Par rapport à la méthode de Rüchardt, ils procèdent à deux modifications principales :

- Le piston mobile sépare maintenant, de façon étanche, deux compartiments. Son oscillation n'est plus verticale, mais horizontale.
- Un électroaimant exerce une force  $\vec{F}_E(t) = F_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$  sur le piston mobile.

On admet que sous certaines hypothèses, tout ceci modifie l'équation du mouvement pour donner :

$$m\ddot{x} = -\gamma k x - \lambda \dot{x} + F_E(t), \quad (3)$$

avec  $\lambda$  un coefficient de frottement,  $k$  une constante de raideur qui dépend, comme dans le cas précédent, de la géométrie du système et de la pression du gaz au repos, et  $F_E(t) = F_0 \cos(\omega t)$  un forçage à la pulsation  $\omega$  imposée.

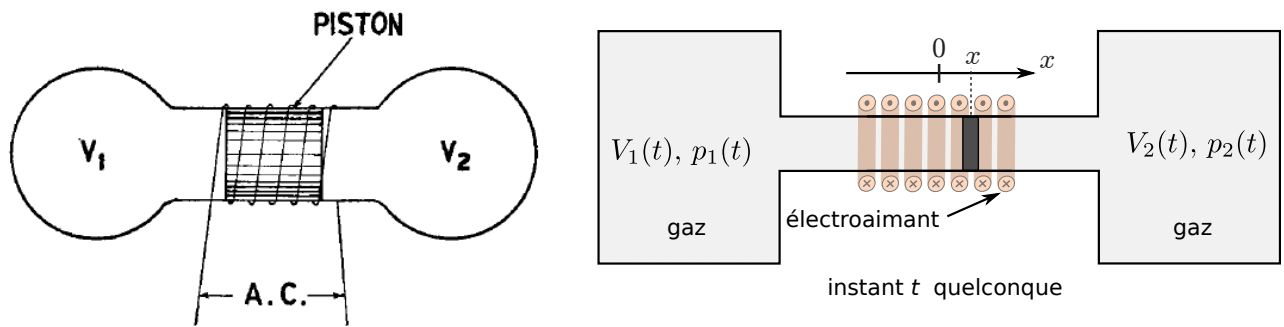


Figure 5 : schéma de la manipulation, à gauche issue de l'article original (source : [doi.org/10.1139/cjr40a-002](https://doi.org/10.1139/cjr40a-002)), à droite retravaillée.

#### III.1 Mise en équation

Clark et Katz exploitent le phénomène de résonance. Pour le mettre en évidence, nous utilisons la notation complexe (avec  $j$  le nombre complexe tel que  $j^2 = -1$ ) :

- le signal  $F_E(t) = F_0 \cos(\omega t)$  est représenté par  $\underline{F}_E(t) = F_0 e^{j\omega t}$  ;
- la position de la masse est du type  $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , représentée par  $\underline{x}(t) = \underline{X}_0 e^{j\omega t}$ , avec l'amplitude complexe  $\underline{X}_0 = X_0 e^{j\varphi}$ .

**20 -** À partir de l'équation (3), établir une expression de l'amplitude complexe  $\underline{X}_0$ . L'écrire sous la forme

$$\underline{X}_0 = \frac{A}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}. \quad (4)$$

On donnera les expressions de  $A$ ,  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction de  $F_0$ ,  $\lambda$ ,  $k$ ,  $\gamma$  et  $m$ .

Le candidat pourra admettre cette relation (4) pour poursuivre.

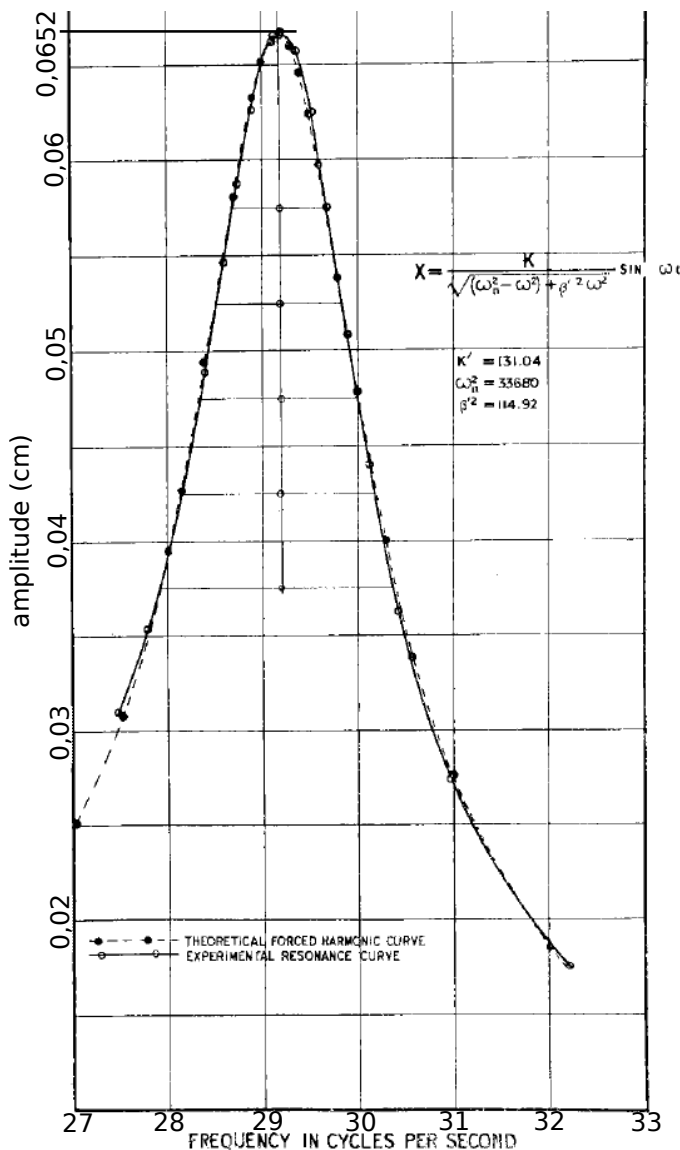
**21 -** Donner l'expression de l'amplitude  $X_0$  du signal  $x(t)$ , en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $A$ .

**22 -** Indiquer vers quoi tend  $X_0$  lorsque la pulsation du forçage  $\omega$  tend vers 0, puis lorsqu'elle tend vers  $+\infty$ .

- 23 - On pose  $u = \omega/\omega_0$ . Expliquer pourquoi la recherche d'un maximum de la fonction  $X_0(\omega)$  est équivalente à la recherche d'un minimum pour la fonction  $f(u) = (1 - u^2)^2 + u^2/Q^2$ .
- 24 - Montrer que  $f(u)$  admet un minimum en  $u \neq 0$  seulement si  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Donner alors l'expression de  $u$ , noté  $u_r$ , pour lequel  $f(u)$  est minimale.
- 25 - On note  $\omega_r$  la pulsation non nulle pour laquelle  $X_0(\omega)$  est maximale, lorsque  $Q > 1/\sqrt{2}$ . Donner l'expression de  $\omega_r$  en fonction de  $\omega_0$  et de  $Q$ .  
Que dire du rapport  $\omega_r/\omega_0$  lorsque  $Q \approx 10$  comme ici ?
- 26 - En partant de l'expression (4), donner l'expression de  $X_0$  en  $\omega = \omega_0$ .  
En déduire les valeurs de  $X_0$  et de  $\varphi$  pour la pulsation  $\omega_0$ .
- 27 - Tracer l'allure de la courbe  $X_0(\omega)$ , en précisant les expressions en  $\omega = 0$  et  $\omega = \omega_0$ .
- 28 - Établir l'expression de  $\varphi$  lorsque  $\omega$  tend vers 0, puis lorsque  $\omega$  tend vers  $+\infty$ .
- 29 - Tracer alors l'allure de la courbe  $\varphi(\omega)$ .

### III.2 Exemples de résultats

Clark et Katz exploitent la mesure de  $\omega_r$  pour remonter à celle de  $\gamma$ . Ils prennent en compte diverses corrections non abordées ici (écart aux gaz parfaits, mise en mouvement du gaz, non adiabaticité...). La figure 6 montre des exemples de valeurs obtenues.



|                |                    |
|----------------|--------------------|
| July 15, 1938: | 1.401 <sub>6</sub> |
|                | 1.401 <sub>4</sub> |
|                | 1.401 <sub>3</sub> |
| Feb. 24, 1939: | 1.401 <sub>3</sub> |
|                | 1.400 <sub>8</sub> |
|                | 1.401 <sub>0</sub> |
| March 7, 1939: | 1.401 <sub>2</sub> |
|                | 1.400 <sub>9</sub> |
| Average        | 1.401 <sub>2</sub> |

Figure 6.  
Gauche : courbe de  $X_0$  en fonction de la fréquence (en Hz) obtenue par Clark et Katz.  
Droite : valeurs obtenues pour du diazote, sous 1 bar, lors de différentes répétitions de l'expérience.  
(source : [doi.org/10.1139/cjr40a-003](https://doi.org/10.1139/cjr40a-003))

**30** - On note  $\gamma_i$  la valeur numéro  $i$  de  $\gamma$  obtenue par Clark et Katz sur la figure 6 (droite). Il y a  $N = 8$  valeurs. "Average" est la moyenne de ces 8 valeurs.

Quelle opération effectuer pour évaluer l'incertitude-type sur cette valeur moyenne ?

**31** - On souhaite estimer la valeur du facteur de qualité  $Q$  pour l'expérience de la figure 6 (gauche). On rappelle que les fréquences de coupures  $f_{c,1}$  et  $f_{c,2}$  sont définies comme celles pour lesquelles  $X_0(f) = (X_0)_{\max}/\sqrt{2}$ . Pour une résonance assez piquée comme ici, on a la relation

$$|f_{c,1} - f_{c,2}| \approx \frac{f_r}{Q}$$

avec  $f_r$  la fréquence de résonance. On donne  $\sqrt{2} \approx 1,4$ .

Exploiter la figure 6 (gauche) pour en déduire une valeur de  $Q$ . Expliquer votre démarche, par exemple à l'aide d'une reproduction de l'allure de la figure 6 sur votre copie. On arrondira raisonnablement les valeurs pour faire les applications numériques.

On s'intéresse ensuite aux valeurs de  $\gamma$  obtenues. La valeur prédite par la théorie, pour un gaz parfait diatomique, est  $\gamma = 1,4$ .

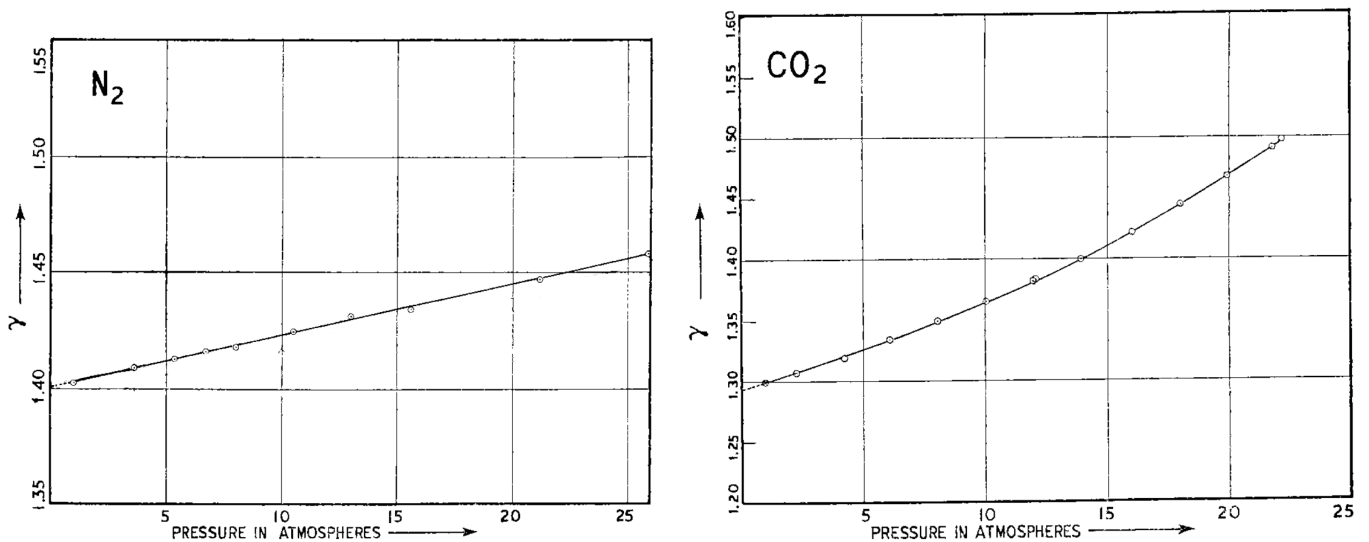


Figure 7 : valeurs de  $\gamma$  obtenues par Clark et Katz, à différentes pressions.

Gauche : pour  $N_2$ . Droite : pour  $CO_2$ .

**32** - On considère les résultats pour le diazote  $N_2$  (figure 7, gauche). Qu'est-ce qui explique les écarts de plus en plus importants à la valeur 1,4 à mesure que la pression augmente ?

**33** - On considère les résultats pour le  $CO_2$  (figure 7, droite). Qu'est-ce qui explique les écarts importants à la valeur 1,4, même à basse pression ?