

Concours EPITA – IPSA -ESME
Epreuve de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur
Lanceur réutilisable expérimental FROG,
un projet collaboratif innovant

Durée : 2 heures

L'utilisation de calculatrices est interdite. La consultation de documents est interdite.

Le sujet comporte 7 pages.

Notations

On notera :

- Le torseur cinématique du solide i par rapport au solide j : $V_{i/j} = \{\vec{\Omega}_{i/j} | \vec{V}_{P,i/j}\}_P$ où $\vec{\Omega}_{i/j}$ représente le vecteur taux de rotation du solide i par rapport au solide j et $\vec{V}_{P,i/j}$ le vecteur vitesse du point P dans le mouvement du solide i par rapport au solide j .
- Le torseur de l'action mécanique du solide i sur le solide j : $T_{i \rightarrow j} = \{\vec{R}_{i \rightarrow j} | \vec{M}_{P,i \rightarrow j}\}_P$ où $\vec{R}_{i \rightarrow j}$ représente la résultante de l'action mécanique du solide i sur le solide j et $\vec{M}_{P,i \rightarrow j}$ le moment en P de l'action mécanique du solide i sur le solide j .

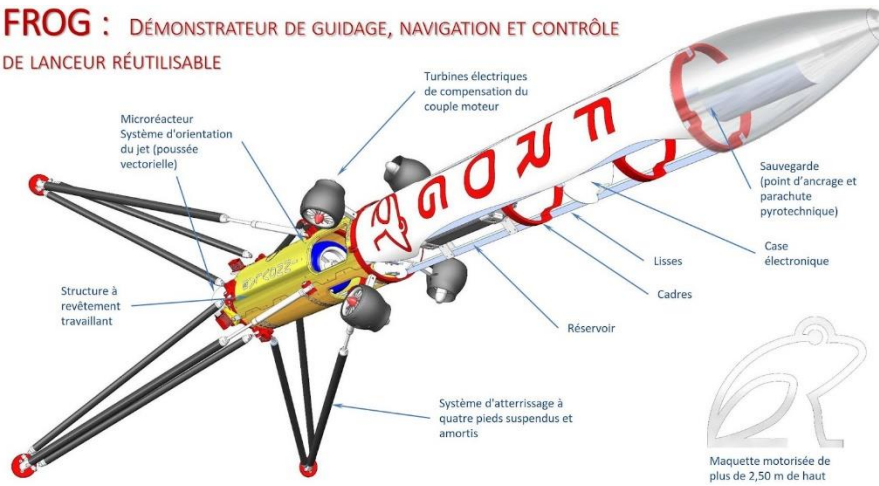
Présentation



Depuis le début de la conquête spatiale, les fusées utilisées pour la mise en orbite d'engins (satellite, ...) sont perdues après leur lancement. Dans un souci d'économie, les constructeurs de fusées ont commencé à réfléchir à la récupération du lanceur dans le cas de vols spatiaux. Le CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) a lancé un projet de mini-lanceur réutilisable : FROG (Rocket For Guidance, Navigation and Control demonstration). C'est un mini lanceur à décollage et atterrissage vertical. Ce projet regroupe plusieurs partenaires industriels et universitaires. Il a pour but de tester des nouveaux algorithmes de guidage, navigation et contrôle du vol.

Ce lanceur est composé d'un fuselage, d'une tuyère orientable assurant la poussée et de 4 pieds qui amortissent le fuselage lors de l'atterrissage.

**FROG : DÉMONSTRATEUR DE GUIDAGE, NAVIGATION ET CONTRÔLE
DE LANCEUR RÉUTILISABLE**



Partie 1 : dimensionnement des pieds et amortisseurs.

L'objectif de cette partie est de déterminer les efforts encaissés par les pieds et les amortisseurs lors de l'atterrissage.

Le fuselage du lanceur est noté 1 (voir Figure 1). Pour des raisons de simplification, on considérera que les 4 pieds sont identiques. Un seul pied est représenté sur la Figure 1. Les 4 pieds sont composés chacun d'une tige de renvoi 2 et d'un amortisseur. L'amortisseur est composé d'un corps 3 et d'une tige 4. La tige de renvoi 2 est liée à un patin 5, lui-même en contact avec le sol.

Les liaisons entre les solides sont les suivantes :

- Les solides 1 et 2 sont en liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) .
- Les solides 2 et 3 sont en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) .
- Les solides 3 et 4 sont en liaison pivot glissant d'axe \vec{AC} . Un ressort non représenté assure le rappel de la pièce 3 par rapport à 4.
- Les solides 1 et 4 sont en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_0) .
- Les solides 2 et 5 sont en liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) .
- Les solides 0 et 5 sont en liaison pivot appui plan de normale (A, \vec{y}_0) .

Les dimensions du mécanisme sont telles que $(\vec{AB}, \vec{x}_0) = 45^\circ$ et $(\vec{AC}, \vec{x}_0) = 60^\circ$.

La masse du fuselage 1 est noté $M = 30 \text{ kg}$. Les pieds solides (2, 3 et 4) ont une masse négligeable devant celle du solide 1. On considère que l'ensemble des solides 0, 1, 2, 3, 4 et 5 sont en équilibre par rapport à la Terre. Le référentiel terrestre est considéré galiléen. On notera $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur suivant $-\vec{y}_0$.

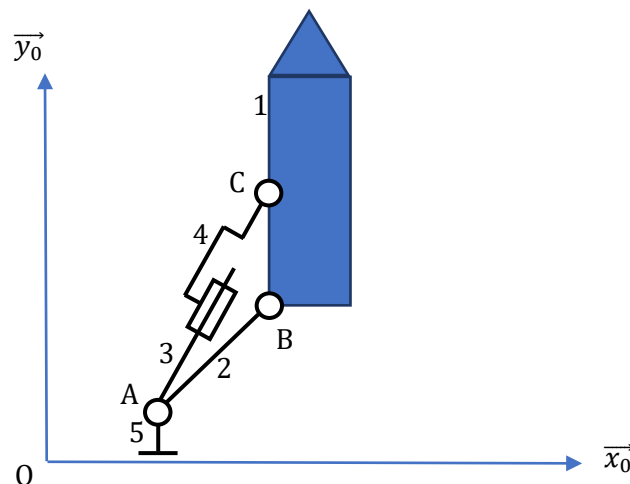
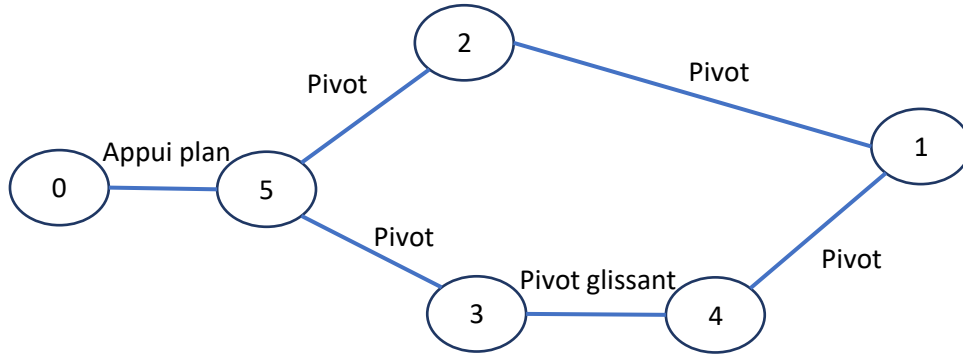


Figure 1 : Modélisation d'un pied

1. Tracer le graphe des liaisons du mécanisme constitué par les solides 0, 1, 2, 3, 4 et 5.



2. Déterminer le torseur de l'action mécanique du solide 0 sur le solide 5 en A.

On isole l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$ et on applique le PFS en résultante et on trouve : $T_{0 \rightarrow 5} = \begin{Bmatrix} 0 & | & 0 \\ M.g & | & 0 \\ 4 & | & 0 \\ 0 & | & 0 \end{Bmatrix}_A$

On note le torseur de l'action mécanique de 1 sur 2 $T_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} X_{12} & | & L_{12} \\ Y_{12} & | & M_{12} \\ Z_{12} & | & N_{12} \end{Bmatrix}_P$.

3. Déterminer la forme du torseur $T_{1 \rightarrow 2}$ en fonction de X_{12} .

On isole 2, on applique le PFS et on trouve $T_{1 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} X_{12} & | & 0 \\ X_{12} & | & 0 \\ 0 & | & 0 \end{Bmatrix}_B$

On note le torseur de l'action mécanique de 1 sur 4 $T_{1 \rightarrow 4} = \begin{Bmatrix} X_{14} & | & L_{14} \\ Y_{14} & | & M_{14} \\ Z_{14} & | & N_{14} \end{Bmatrix}_P$.

4. Déterminer la forme du torseur $T_{1 \rightarrow 4}$ en fonction de X_{14} .

On isole $\{3,4\}$, on applique le PFS et on trouve $T_{1 \rightarrow 4} = \begin{Bmatrix} X_{14} & | & 0 \\ X_{14}\sqrt{3} & | & 0 \\ 0 & | & 0 \end{Bmatrix}_C$.

5. Déterminer la norme F_{14} de la résultante du torseur $T_{1 \rightarrow 4}$ et la norme F_{12} de la résultante du torseur $T_{1 \rightarrow 2}$.

On isole l'ensemble $\{2,3,4,5\}$, on applique le PFS et on obtient $X_{12} + X_{14} = 0$ et $X_{12} + X_{14}\sqrt{3} + \frac{M.g}{4} = 0$

On trouve $\begin{cases} X_{14} = -\frac{M.g}{4(\sqrt{3}-1)} \\ Y_{14} = -\frac{M.g\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-1)} \end{cases}$ et $\begin{cases} X_{12} = \frac{M.g}{4(\sqrt{3}-1)} \\ Y_{12} = \frac{M.g}{4(\sqrt{3}-1)} \end{cases}$ et finalement $F_{14} = \frac{M.g}{2(\sqrt{3}-1)}$ et $F_{12} = \frac{M.g\sqrt{2}}{4(\sqrt{3}-1)}$.

Partie 2 : Elaboration d'un modèle

L'objectif de cette partie est d'élaborer un modèle de la fusée en vol stationnaire (vol à altitude quasiment constante) et de l'orientation de la tuyère permettant sa stabilité.

On considère dans cette partie le lanceur en vol, il n'est plus en contact avec le sol. Le fuselage 1 est en liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_0) avec la tuyère T du moteur assurant la poussée. On notera G le centre de gravité du fuselage 1, sa

masse M et sa matrice d'inertie en G est $I_{1,G} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}$. La tuyère est considérée de masse et d'inertie

négligeables devant celles du fuselage 1. Les gaz éjectés par la combustion exercent une action mécanique sur la tuyère de torseur $T_{gaz \rightarrow tuyère} = \{F \cdot \vec{y}_T | \vec{0}\}_D$ avec $F > 0$. On note $\vec{DG} = h \cdot \vec{y}_1$ et $\vec{OG} = x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0$.

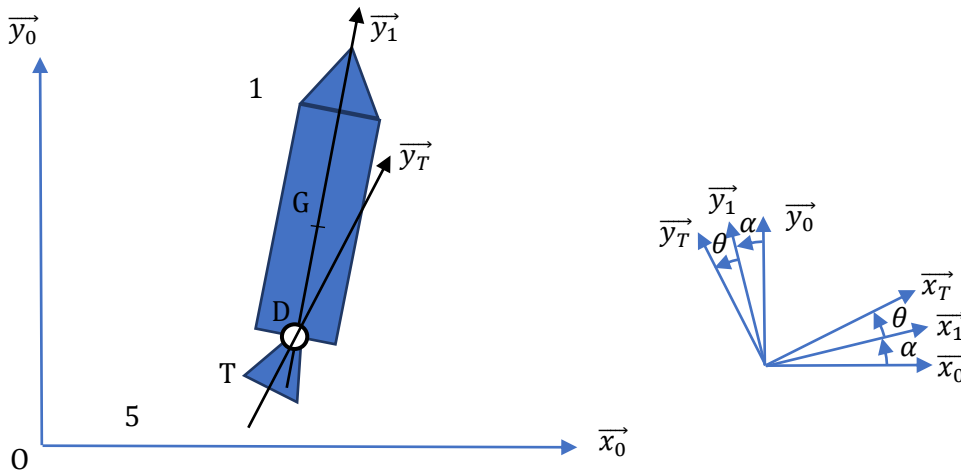


Figure 2 : Modélisation du lanceur en vol

On note $(\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \alpha$ et $(\vec{y}_1, \vec{y}_T) = \theta$. L'angle θ est piloté par un actionneur asservi dans une étude ultérieure.

6. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble $\{1, T\}$ et déterminer 3 relations liant α , x , y et leurs dérivées à θ et aux constantes du problème.

$$\begin{cases} M\ddot{x} = -F \cdot \sin(\theta + \alpha) \\ M\ddot{y} = F \cdot \cos(\theta + \alpha) - M \cdot g \\ C \cdot \ddot{\alpha} = -F \cdot h \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

7. En considérant les angles α et θ petits, linéariser les équations précédentes.

$$\begin{cases} M\ddot{x} = -F \cdot (\theta + \alpha) \\ M\ddot{y} = F - M \cdot g \\ C \cdot \ddot{\alpha} = -F \cdot h \cdot \theta \end{cases}$$

8. Simplifier les équations dans le cas du vol à altitude y constante.

$$\begin{cases} M\ddot{x} = -M \cdot g \cdot (\theta + \alpha) \\ 0 = F - M \cdot g \\ C \cdot \ddot{\alpha} = -M \cdot g \cdot h \cdot \theta \end{cases}$$

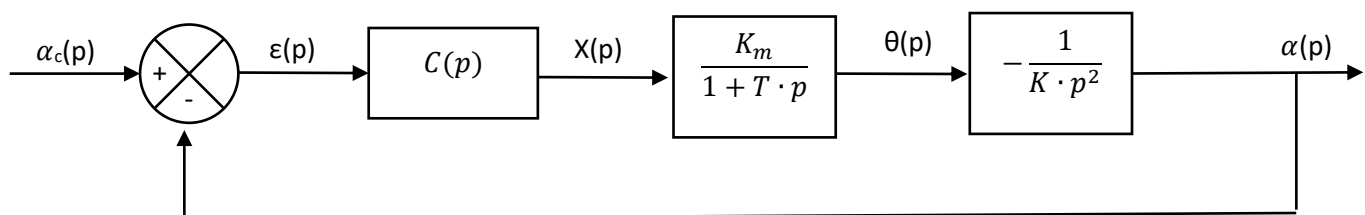
9. Appliquer la transformée de Laplace à la relation précédente liant θ , α et leurs dérivées successives. La mettre sous la forme $\frac{\alpha(p)}{\theta(p)} = -\frac{1}{K \cdot p^2}$ en donnant l'expression de K (K est une grandeur positive) en fonction des constantes du problème.

$$\frac{\alpha(p)}{\theta(p)} = -\frac{1}{K \cdot p^2} \text{ avec } K = \frac{C}{M \cdot g \cdot h}$$

Partie 3 : Pilotage de la fusée

L'objectif de cette partie est de proposer une stratégie de pilotage de l'actionneur de la tuyère.

L'angle α que fait le fuselage avec la verticale est asservi suivant le modèle ci-dessous :



On donne une consigne d'angle $\alpha_c(p)$ au système. L'angle $\alpha(p)$ est mesuré par un capteur (gain unitaire). $\alpha_c(p)$ est comparé à $\alpha(p)$ pour former un écart appelé $\epsilon(p)$. Cet écart est corrigé par un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ pour former un signal $X(p)$ qui permet le pilotage d'un actionneur de fonction de transfert $\frac{K_m}{1+T \cdot p}$ (avec $K_m = 1 \text{ USI}$ et $T = 0,05 \text{ s}$) qui fait tourner la tuyère d'un angle θ par rapport au fuselage. On prendra $K = 0,025 \text{ s}^2$.

Le cahier des charges de l'asservissement est le suivant :

Stabilité	Marge de phase de 60°.
Précision	Ecart statique indiciel nul en boucle fermée.
Rapidité	Pulsation à 0dB de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte égale à 15 rad/s.

10. Donner la fonction de transfert en boucle ouverte du système non corrigé notée $FTBO(p)$ sous forme numérique.

$$FTBO(p) = -\frac{K_m}{1+T \cdot p} \cdot \frac{1}{K \cdot p^2} = -\frac{40}{(1+0,05p) \cdot p^2}$$

11. Donner la fonction de transfert en boucle fermée du système non corrigé notée $FTBF(p)$.

$$FTBF(p) = -\frac{K_m}{(1+T \cdot p) \cdot K \cdot p^2 - K_m} = -\frac{1}{(1+0,05 \cdot p) \cdot 0,025 \cdot p^2 - 1}$$

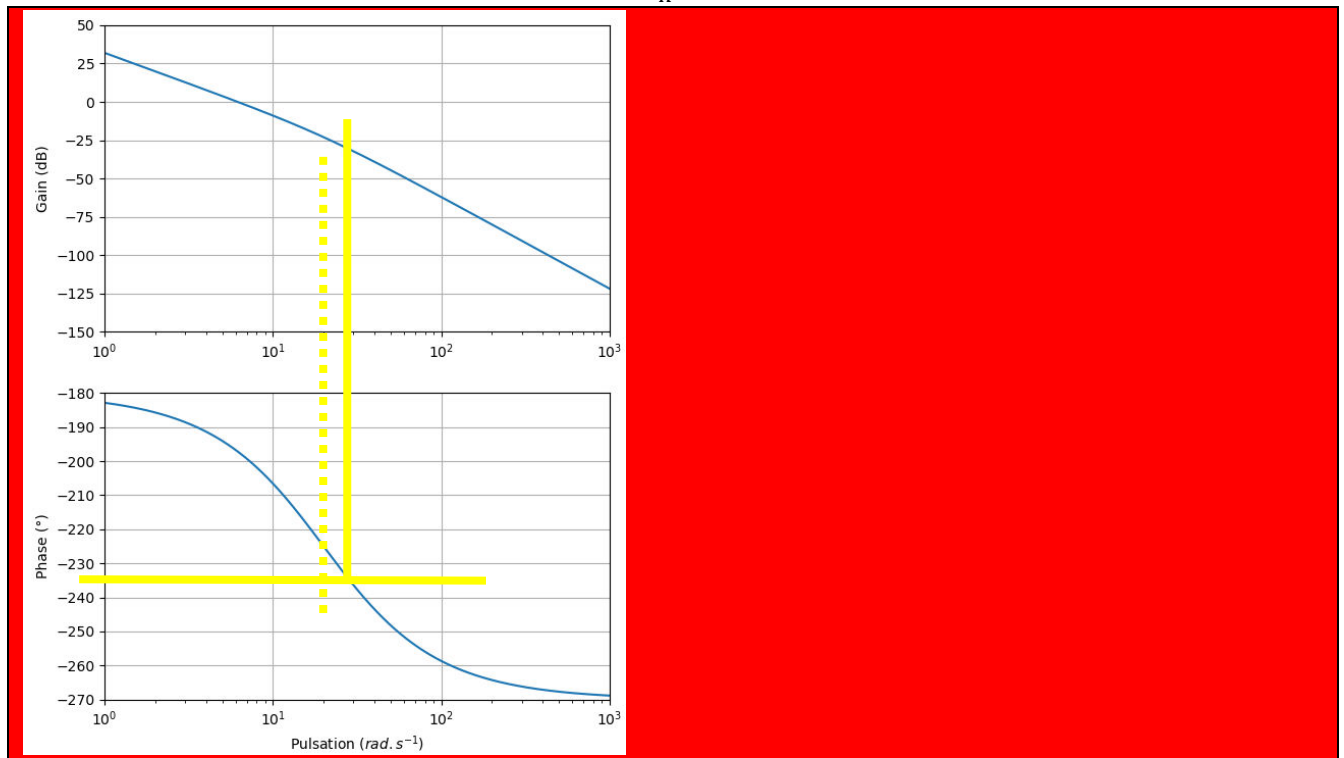
12. Ce système est-il stable ? Justifier.

Pour que le système soit stable, il faut que les racines du dénominateur de la FTBF soient à partie réelle strictement négative. $(1+T \cdot p) \cdot K \cdot p^2 - K_m = 0$.

Notons p_1 , p_2 et p_3 les racines, on a $(1+T \cdot p) \cdot K \cdot p^2 - K_m = K \cdot T(p-p_1) \cdot (p-p_2) \cdot (p-p_3)$. Il faut en particulier que $p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_3 = 0$. Il est donc nécessaire qu'une des racines soit positives, le système est donc instable.

On met tout d'abord en place un correcteur proportionnel inverseur de fonction de transfert $C(p) = -K_0$.

13. Tracer sur le document réponse le diagramme asymptotique ainsi que l'allure du diagramme de Bode du système ainsi corrigé avec $K_0 = 1$. On donne $20 \log \frac{K_m}{K} = 32dB$.



On met en place un correcteur de fonction de transfert $C(p) = -K_0 \cdot \frac{1+a \cdot T \cdot p}{1+T \cdot p}$ avec $a > 1$.

14. Nommer ce correcteur. Donner ses avantages à l'aide de son diagramme de Bode.

Ce correcteur est un correcteur à avance de phase. Il permet d'améliorer la stabilité car la phase est positive lorsque $a > 1$.

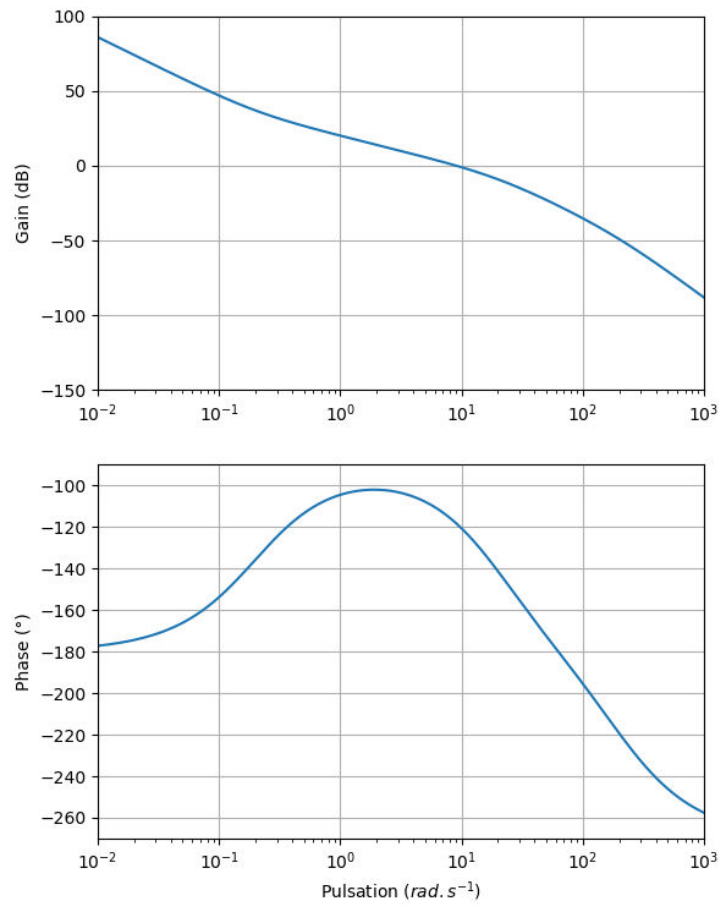
15. Donner la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte du système ainsi corrigé, notée $FTBOC(p)$.

$$FTBOC(p) = K_0 \cdot \frac{1+a \cdot T \cdot p}{1+T \cdot p} \cdot \frac{K_m}{1+T \cdot p} \cdot \frac{1}{K \cdot p^2}$$

16. En déduire l'erreur statique. Le critère de précision est-il vérifié ?

Il y a 2 intégrateurs dans la FTBOC, l'erreur statique est nulle, le cahier des charges est vérifié.

Après réglage du correcteur, on trace le diagramme de Bode de la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte ci-dessous.



17. Evaluer la marge de phase et conclure sur le critère de stabilité.

La marge de phase est d'environ 60°. Le cahier des chartes est vérifié.

