Correction – Expérience de Rüchardt

Total barème : $21 + 20 + 32 + 7 = 80$ points

I Détermination de la période des oscillations

1 - – Transformation adiabatique et réversible (ou isentropique) (1pt) pour le système {gaz} (adiabatique et mécaniquement réversible convient également) ;

– et équation d'état du gaz parfait (1pt).

2 - $\boxed{V(t) = V_0 - \Sigma x.}$ (1pt)

3 - $p = \dfrac{p_0 V_0^\gamma}{(V_0 - \Sigma x)^\gamma} = \dfrac{p_0}{(1 - \Sigma x/V_0)^\gamma} \simeq p_0 \left(1 + \dfrac{\gamma \Sigma x}{V_0}\right)$. (2pt pour expression de $p(t)$ correcte)

Donc : $\vec{F} = (p_0 - p(t))\Sigma \vec{e}_x = -\dfrac{p_0 \gamma \Sigma^2 x}{V_0} = -\gamma k x \, \vec{e}_x$ avec $\boxed{k = \dfrac{p_0 \Sigma^2}{V_0}.}$ (2pt)

4 - $\boxed{m\ddot{x} = mg - \gamma k x.}$ (2pt)

5 - $\ddot{x} + \dfrac{\gamma k}{m} x = g$, pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{\gamma k}{m}}.}$ (2pt)

6 - $\boxed{x(t) = A\cos\omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \dfrac{mg}{\gamma k}.}$ (2pt (1 sol. générale + 1 sol. particulière))

7 - $\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} = \omega_0^2 = \gamma \dfrac{k}{m}$, donc $\boxed{\gamma = \dfrac{4\pi^2}{T_0^2}\dfrac{m}{k}.}$ (2pt)

8 - $\boxed{E_c = \dfrac{1}{2} m \dot{x}^2}$ et $\boxed{E_{\text{p,pes}} = -mgx.}$ (2pt (un pour chaque))

9 - $\boxed{E_p = \dfrac{1}{2}\gamma k \, x^2.}$ (2pt)

10 - $E_m = \dfrac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx + \dfrac{1}{2}\gamma k \, x^2$. Au départ, $E_m = 0$. Au point de demi-tour, $E_m = -mgL + \dfrac{1}{2}\gamma k \, L^2$.

D'où $\dfrac{1}{2}\gamma k \, L^2 = mgL$, d'où $\boxed{L = \dfrac{2mg}{\gamma k}.}$ (2pt, dont un pour l'idée d'utiliser $E_m = \text{cst}$)

II Étude mécanique avec frottements

11 - $Q \approx$ entre 8 et 11 (nombre d'oscillations significatives). (1pt)

Régime pseudo-périodique. (1pt)

12 - Polynome caractéristique : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$. Racines : $r_\pm = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$,

donc $\boxed{\mu = \dfrac{\omega_0}{2Q} \quad \text{et} \quad \Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}.}$ (2pt Ω et 2pt μ)

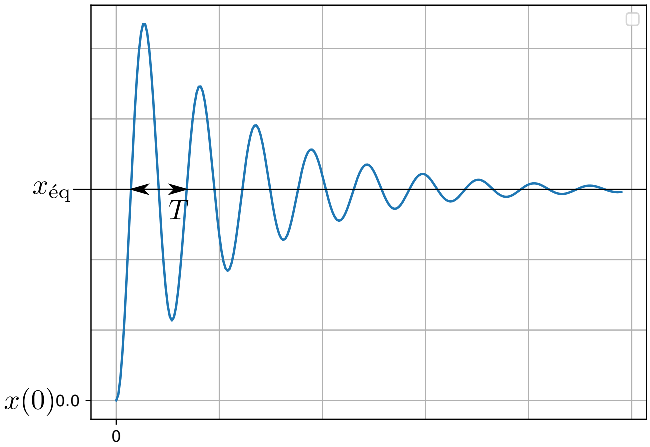
13 - Il suffit d'ajouter la solution particulière : $\boxed{x(t) = (A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + \frac{g}{\omega_0^2}.}$ (2pt)

14 - $0 = x(0) = A + \frac{g}{\omega_0^2}$ donc $\boxed{A = -\frac{g}{\omega_0^2}.}$ (1pt)

$0 = \dot{x}(0) = ... = \Omega B - A\mu$ donc $\boxed{B = \frac{A\mu}{\Omega} = -\frac{g\mu}{\omega_0^2\Omega}.}$ (2pt)

15 - $\boxed{x_{\text{éq}} = \frac{g}{\omega_0^2}.}$ (2pt)

16 - Même allure que l'enregistrement (2pt (0,5 allure, 0,5 pour $x(0)$, 0,5 pour $x_{\text{éq}}$, 0,5 pour T))



17 - Pas de différence car Q élevé et donc $\sqrt{1 - 1/(4Q^2)} \approx 1$. (1pt)

18 - $\mu = \frac{\omega_0}{2Q} \approx \frac{\Omega}{2Q}$, donc $Q \approx \frac{\Omega}{2\mu} = \frac{5{,}8}{0{,}6}$, soit $\boxed{Q \approx 10.}$ (2pt)

(il est aussi possible d'utiliser $B/A = \mu/\Omega \approx 1/(2Q)$, mais c'est moins fiable car les valeurs de A et B sont moins fiables, cf comparaisons fig 3 et 4.)

19 - Le terme en Dt traduit une augmentation linéaire de x, donc une chute progressive du piston. On peut penser à une mauvaise étanchéité du dispositif, ou encore à des pertes thermiques vers l'extérieur (T_{finale} prévue par le modèle adiabatique est plus grande que T_{ext}, une relaxation vers T_{ext} fait descendre le piston).

(2pt pour l'idée "fuite d'air" ou pour l'idée "pertes thermiques")

III Étude en régime sinusoïdal forcé

20 - On passe l'équation en complexes : $-m\omega^2\underline{x} = -\gamma k\,\underline{x} - \lambda \mathrm{j}\omega\underline{x} + \underline{F_{\mathrm{E}}}$.

$$\Rightarrow \quad \underline{X_0}\left(-m\omega^2 + \gamma k + \lambda \mathrm{j}\omega\right) = F_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{X_0} = \frac{F_0}{-m\omega^2 + \gamma k + \lambda\mathrm{j}\omega} = \frac{\frac{F_0}{\gamma k}}{1 - \frac{m\omega^2}{\gamma k} + \frac{\lambda}{\gamma k}\mathrm{j}\omega} \quad \text{(2pt)}$$

On identifie $\boxed{A = \frac{F_0}{\gamma k},}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma k}{m}},}$ et $Q\omega_0 = \frac{\gamma k}{\lambda}$ donc $\boxed{Q = \frac{\sqrt{\gamma k m}}{\lambda}.}$ (2pt)

21 - $\boxed{X_0 = |\underline{X_0}| = \frac{A}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}.}$ (2pt)

22 - $\boxed{X_0 \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} A \quad \text{et} \quad X_0 \underset{\omega\to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$ (1pt + 1pt)

23 - On a établit que $X_0(\omega) = 1/f(u)^{1/2}$, donc X_0 maximal $\Leftrightarrow$ $f(u)$ minimale. (1pt)

24 - $f'(u) = -4u(1-u^2)+2u/Q^2$ donc (pour $u \neq 0$) : $f'(u) = 0 \Leftrightarrow 4(1-u^2) = 2/Q^2 \Leftrightarrow \boxed{u_\mathrm{r} = \sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}}$

qui n'existe que si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. (2pt)

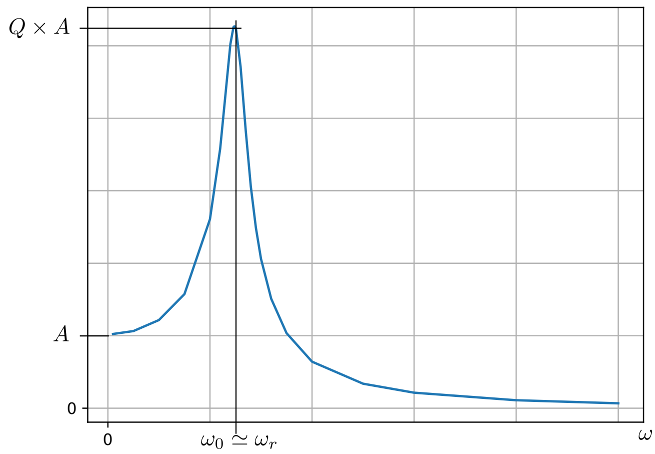
On vérifie que c'est bien un minimum, par exemple car $f''(u) = -4+12u^2+\frac{2}{Q^2}$ et donc $f''(u_\mathrm{r}) = 8\left(1-\dfrac{1}{2Q^2}\right) > 0$. (2pt)

25 - $\boxed{\omega_\mathrm{r} = \omega_0\, u_\mathrm{r} = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}.}$ (2pt)

Si $Q \gg 1$, alors $1-1/(2Q^2) \approx 1$ et $\boxed{\omega_\mathrm{r}/\omega_0 \approx 1.}$ (1pt)

26 - $\boxed{\underline{X_0}(\omega_0) = -\mathrm{j}AQ,}$ donc $\boxed{X_0(\omega_0) = AQ \quad \text{et} \quad \varphi(\omega_0) = -\pi/2.}$ (3pt (un pour chaque))

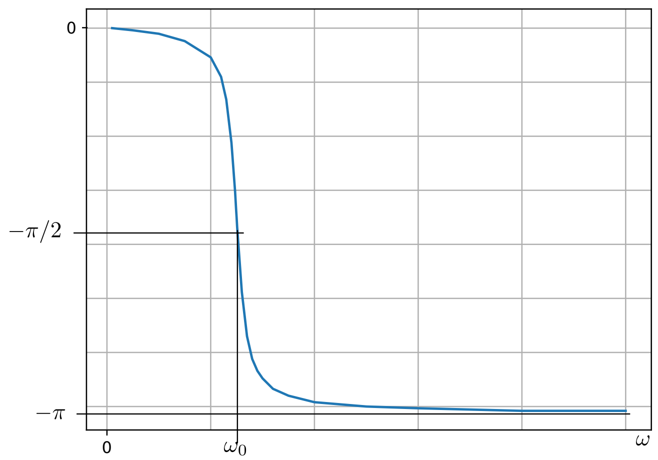
27 - Allure. (2pt)



28 - En 0, $\underline{X_0} \simeq A$, donc $\boxed{\varphi \simeq 0.}$ (1pt)

En $+\infty$, $\underline{X_0} \simeq -\dfrac{A\omega_0^2}{\omega^2}$, donc $\varphi \simeq \pm\pi$. Étant donné que $\varphi(\omega_0) = -\pi/2$, la continuité du graphique impose le choix $\boxed{\varphi \simeq -\pi.}$ (2pt)

29 - Allure. (2pt)

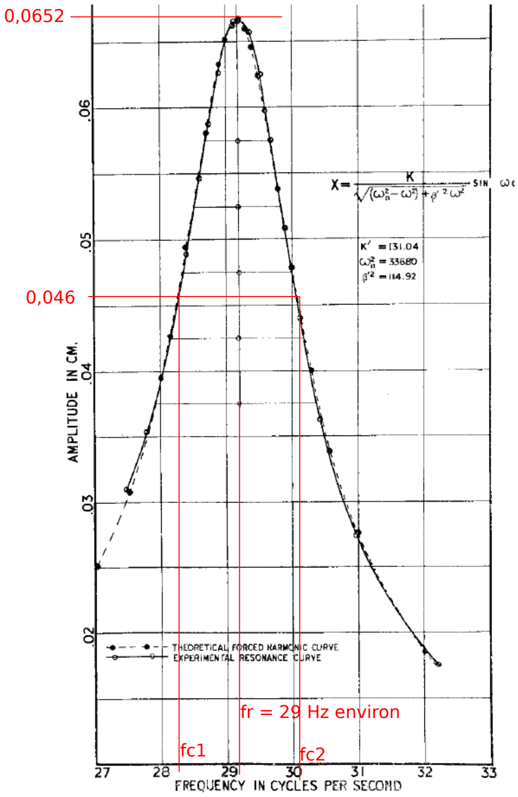


30 - Il faut calculer l'écart-type σ de la série de mesure. Puis l'incertitude-type est donnée par $\boxed{u(\bar{\gamma}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}.}$ (2pt)

31 - On arrondit les valeurs car pas de calculatrice. $(X_0)_\mathrm{max} \approx 0{,}065\,\mathrm{cm}$ et $\dfrac{0{,}065}{1{,}4} \approx 0{,}046\,\mathrm{cm}$.

On lit alors les fréquences de coupure, et on voit que $|f_{\mathrm{c},1} - f_{\mathrm{c},2}| \approx 2\,\mathrm{Hz}$. De plus, $f_\mathrm{r} \approx 29\,\mathrm{Hz}$.

D'où $\boxed{Q = \frac{29}{2} \approx 14 \text{ ou } 15.}$ (2pt)



32 - p élevée $\Rightarrow$ modèle du gaz parfait de moins en moins valable. (1pt)

33 - CO_2 n'est pas un gaz diatomique. (1pt)

IV Étude de l'origine de la dissipation

34 - Par ex. si $T < T_0$ on souhaite que $\delta Q > 0$ (car reçu par le gaz). C'est bien le cas grâce au signe moins. (2pt)

35 - $T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V = \mathrm{d}U = -p\mathrm{d}V + \delta Q$ donne $T\mathrm{d}S = \delta Q$. (1pt)

36 - $\mathrm{d}S = \delta S_\mathrm{e} + \delta S_\mathrm{c} = \dfrac{\delta Q}{T_0} + \delta S_\mathrm{c}$.

Or $\mathrm{d}S = \dfrac{\delta Q}{T}$, donc $\boxed{\delta S_\mathrm{c} = \dfrac{\delta Q}{T} - \dfrac{\delta Q}{T_0}.}$ (2pt (dont 1 pour $\delta S_\mathrm{e} = \delta Q / T_0$))

37 - On remplace δQ par $-h\Sigma_t(T - T_0)\mathrm{d}t$: $\boxed{\delta S_\mathrm{c} = -h\Sigma_t(T - T_0)\mathrm{d}t\left(\dfrac{1}{T} - \dfrac{1}{T_0}\right).}$ (1pt)

Réécriture : $\boxed{\delta S_\mathrm{c} = h\Sigma_t \mathrm{d}t\, \dfrac{(T_0 - T)^2}{T_0 T} > 0.}$ (1pt)