Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2024

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques PT – TSI

Exponentielle de matrices nilpotentes

Dans ce problème on s'intéresse au calcul d'exponentielles de matrices nilpotentes et à la résolution de systèmes différentiels.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ comme pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désignera le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^\star$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sera noté $GL_n(\mathbb{K})$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera par $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique.
- On identifiera les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Soit x_1, x_2 et x_3 trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on définit $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}$.
- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. En adoptant les notations précédentes, et en notant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$,

  le système d'équations différentielles d'inconnues x_1, x_2 et x_3 :

  $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + a_{1,3}x_3(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + a_{2,3}x_3(t) \\ x_3'(t) = a_{3,1}x_1(t) + a_{3,2}x_2(t) + a_{3,3}x_3(t) \end{array} \right.$$

  pourra donc être représenté sous forme matricielle par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

  ou de façon plus condensée par $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$ que l'on qualifiera de **système différentiel**.
- On admettra que $\forall P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),\ (PX(t))' = PX'(t)$.

On définit dans ce problème $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1 Étude d'une matrice nilpotente

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Lorsqu'il existe un entier naturel p tel que $N^p = 0_n$, on dira que la matrice N est **nilpotente**.
Le plus petit entier p vérifiant $N^p = 0_n$ est appelé **indice de nilpotence** de la matrice N.
On notera par $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est nilpotente. On déterminera également son indice de nilpotence.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ et $A^3 = AA^2 = 0_n$, ainsi A est nilpotente d'indice 3.

2. Montrer que $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \chi_A(\lambda)=\lambda^3$.

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \chi_A(\lambda)=\det(\lambda I_3-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -3\\ -5 & \lambda-2 & -6\\ 2 & 1 & \lambda+3\end{vmatrix}\underset{C_3\leftarrow C_3-3C_2}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -5 & \lambda-2 & -3\lambda\\ 2 & 1 & \lambda\end{vmatrix}$$
$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -5 & \lambda-2 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}\underset{L_1\leftarrow L_1-L_2-L_3}{=}\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ -\lambda & \lambda-2 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$
$$\underset{C_2\leftarrow C_2+C_1-C_3}{=}\lambda^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda & -3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\lambda^3\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\lambda^3$$

Ainsi $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \chi_A(\lambda)=\lambda^3$.

3. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$?

— χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

— $$AX=0\underset{X=(x_1,x_2,x_3)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=0\\5x_1+2x_2+6x_3=0\\-2x_1-x_2-3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=0\\-3x_2-9x_3=0\\x_2+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=0\\x_2+3x_3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2+3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}0\\-3x_3\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$$

L'espace propre de A associé à la valeur propre 0 est donc un espace de dimension 1.
Puisque la multiplicité de 0 comme racine de χ_A n'est pas 3, on en déduit que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (ni sur $\mathbb{C}$).

4. Déterminer X_1, X_2 et X_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $AX_1=0$, $AX_2=X_1$ et $AX_3=X_2$.
On choisira X_1, X_2 et X_3 de sorte que la 3e coordonnée de X_1 soit 1 et que celle de X_2 et de X_3 soit nulle.

— On en déduit de la question 3 que $X_1=\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}$ convient.

— $$AX_2=X_1\underset{X_2=(x_1,x_2,x_3)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=0\\5x_1+2x_2+6x_3=-3\\-2x_1-x_2-3x_3=1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=0\\-3x_2-9x_3=-3\\x_2+3x_3=1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=0\\x_2+3x_3=1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-1\\x_2+3x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-1\\-3x_3+1\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Ainsi $X_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ convient.

— $$AX_3=X_2\underset{X_3=(x_1,x_2,x_3)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=-1\\5x_1+2x_2+6x_3=1\\-2x_1-x_2-3x_3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=-1\\-3x_2-9x_3=6\\x_2+3x_3=-2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2+3x_3=-1\\x_2+3x_3=-2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=1\\x_2+3x_3=-2\end{cases}\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}1\\-3x_3-2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

Ainsi $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

5. En déduire qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$, que l'on précisera, telle que $A = PTP^{-1}$.
On vérifiera que la seconde ligne de P a pour somme -4.

La question 4 nous invite à considérer $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

P est bien inversible car $\det(P) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $P \in GL_3(\mathbb{R})$.

On obtient donc $A = PTP^{-1}$ et la seconde ligne de P a bien pour somme -4.

6. Déterminer les solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = TX(t)$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = TX(t) \underset{X(t)=\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t)\right)^{\intercal}}{\Leftrightarrow} \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ x_3'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \exists K_3 \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = K_3 \\ x_3(t) = K_3 \end{cases} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \exists (K_2, K_3) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x_1'(t) = K_3 t + K_2 \\ x_2(t) = K_3 t + K_2 \\ x_3(t) = K_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \exists (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}K_3 t^2 + K_2 t + K_1 \\ x_2(t) = K_3 t + K_2 \\ x_3(t) = K_3 \end{cases}$$

7. Déterminer les solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow X'(t) = PTP^{-1}X(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = TP^{-1}X(t) \underset{Y(t)=P^{-1}X(t)}{\Leftrightarrow} Y'(t) = TY(t)$

Ainsi d'après Q6, $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \exists (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3,\ Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}K_3 t^2 + K_2 t + K_1 \\ K_3 t + K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$

D'où $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \exists (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3,\ X(t) = P \begin{pmatrix} \frac{1}{2}K_3 t^2 + K_2 t + K_1 \\ K_3 t + K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$

Les solutions sont donc les fonctions de la forme $X(t) = \begin{pmatrix} -K_3 t + (K_3 - K_2) \\ -\frac{3}{2}K_3 t^2 + (K_3 - 3K_2)t + (K_2 - 2K_3 - 3K_1) \\ \frac{1}{2}K_3 t^2 + K_2 t + K_1 \end{pmatrix}$

avec K_1, K_2 et K_3 trois réels.

8. On considère le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$.
En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} K_3 - K_2 \\ K_2 - 2K_3 - 3K_1 \\ K_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} K_3 - K_2 \\ K_2 - 2K_3 \\ K_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} K_2 \\ K_3 \\ K_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solution recherchée est donc $t \mapsto \begin{pmatrix} -2t \\ -3t^2 - 4t - 5 \\ t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}$.

2 Quelques propriétés des matrices nilpotentes

9. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ d'indice de nilpotence p. En justifiant qu'il existe $X \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $M^{p-1}X \neq 0$, montrer que la famille $(X, MX, \cdots, M^{p-1}X)$ est libre.

Si $\forall X \in \mathbb{C}^n,\ M^{p-1}X = 0$, on aurait $M^{p-1} = 0_n$, ce qui contredirait que l'indice de nilpotence soit p. Donc par l'absurde on a montré : $\exists X \in \mathbb{C}^n,\ M^{p-1}X \neq 0$.

Soit à présent $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ tel que $\alpha_0 X + \alpha_1 MX + \cdots + \alpha_{p-1}M^{p-1}X = 0$ $(\star)$
En multipliant par M^{p-1} on obtient $\alpha_0 M^{p-1}X = 0$ or $M^{p-1}X \neq 0$ donc $\alpha_0 = 0$.
En reprenant $(\star)$ et en la multipliant successivement par M^{p-2}, ..., M^1, M^0, on obtient la nullité des autres coefficients de proche en proche. La famille $(X, MX, \cdots, M^{p-1}X)$ est donc libre.

10. En déduire que $\forall M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}),\ M^n = 0_n$.

Considérons M une matrice nilpotente d'indice p.
D'après la question 9, la famille $(X, MX, \cdots, M^{p-1}X)$ est une famille libre de p vecteurs de $\mathbb{C}^n$.
Nécessairement $p \leqslant \dim(\mathbb{C}^n) = n$, d'où le résultat annoncé.

11. L'ensemble $\mathcal{N}_2(\mathbb{C})$ est-il un espace vectoriel ? On justifiera sa réponse.

Les matrices $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes d'indice 2, pourtant $N_1 + N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nilpotente car $(N_1 + N_2)^2 = I_2 \neq 0_n$ ce qui contredirait le résultat de la question 10.

12. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que $MN \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

D'après la question 10, on a $M^n = N^n = 0_n$.
Il vient $(MN)^n = M^n N^n = 0_n$ et MN est donc nilpotente.

13. Soient M et N deux matrices de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ qui commutent. Montrer que $M + N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$.

D'après la question 10, on a $M^n = N^n = 0_n$.
Par ailleurs, les matrices commutent donc d'après la formule du binôme de Newton :

$$(M+N)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} M^k N^{2n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} M^k \underbrace{N^{2n-k}}_{=0_n} + \sum_{k=n}^{2n} \binom{2n}{k} \underbrace{M^k}_{=0_n} N^{2n-k} = 0_n$$

Ainsi $M + N$ est nilpotente.

14. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M a pour unique valeur propre 0. En déduire que $\det(M) = 0$.

Soit p l'indice de nilpotence de M.

- Considérons un vecteur propre X de M, associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$.
  D'une part $M^p X = 0X = 0$ car p est l'indice de nilpotence de M et d'autre part $M^p X = \lambda^p X$ car X est vecteur propre de M.
  Finalement $\lambda^p X = 0$ or $X \neq 0$ car X est un vecteur propre d'où $\lambda^p = 0$ et donc $\lambda = 0$.
  Ainsi M ne peut admettre d'autre valeur propre autre que 0.
- $\det(M^p) = \det(0) = 0$ et $\det(M^p) = \det(M)^p$ d'où $\det(M) = 0$.
  M n'est donc pas inversible et $\exists X \neq 0,\ X \in \ker(M)$, d'où $MX = 0X$.
  Ainsi 0 est bien valeur propre de M.

De plus M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ donc elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle. Puisque deux matrices semblables ont même déterminant, on en déduit que le déterminant de M est nul.

15. Soit $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ non nulle. Montrer que N n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Supposons que N soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Dans ce cas, il existerait $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $N = PDP^{-1}$.

Puisque N est nilpotente, elle admet pour unique valeur propre 0 d'après 14, donc D est la matrice nulle.
Ainsi $N = P0_nP^{-1} = 0_n$. Contradiction car $N \neq 0_n$.
Finalement N n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

16. Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Montrer que la matrice $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ a un déterminant nul sans pour autant être nilpotente.

— $\mathrm{rg}(J_n) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right)\right) = 1$ et le théorème du rang nous donne $\dim(\ker J_n) = n - 1 \geqslant 1$ car $n \geqslant 2$. Ainsi J_n n'est pas inversible et son déterminant est nul.

— Cette matrice étant symétrique réelle, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donc également sur $\mathbb{C}$. Or si cette matrice était nilpotente, elle ne serait pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ d'après la question 15. Cette matrice n'est donc pas nilpotente.

17. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure à diagonale nulle (c'est-à-dire $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \geqslant j \Rightarrow m_{i,j} = 0$).
En considérant $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ est M, montrer par récurrence que la propriété « $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \varphi^k(e_i) = 0$ » est vérifiée pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$.
En déduire que $M^n = 0_n$.

Soit $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ est M.
La forme de la matrice M nous donne :

$$\varphi(e_1) = 0 \text{ et } \forall i \in [\![2,n]\!],\ \varphi(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{i-1})\ (\star)$$

Montrons par récurrence que $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall i \in [\![1,k]\!],\ \varphi^k(e_i) = 0$
Soit $\mathcal{H}_k$: « $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \varphi^k(e_i) = 0$ »
<u>Initialisation :</u> $\mathcal{H}_1$ est vraie car $\varphi(e_1) = 0$.
<u>Hérédité :</u> soit $k \in [\![1,n-1]\!]$ pour lequel $\mathcal{H}_k$ est vraie, alors $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \varphi^k(e_i) = 0$.
En composant par φ on obtient directement $\forall i \in [\![1,k]\!],\ \varphi^{k+1}(e_i) = 0$.
Il reste alors à montrer que $\varphi^{k+1}(e_{k+1}) = 0$.
D'après $(\star)$: $\varphi(e_{k+1}) \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ donc $\exists (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k,\ \varphi(e_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i . e_i$
En composant par φ^k et par linéarité : $\varphi^{k+1}(e_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i . \varphi^k(e_i) \underset{\mathcal{H}_k}{=} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i . 0 = 0$
On a donc bien $\mathcal{H}_{k+1}$.
<u>Conclusion :</u> par récurrence il vient $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall i \in [\![1,k]\!],\ \varphi^k(e_i) = 0$.

En choisissant $k = n$: $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \varphi^n(e_i) = 0$.
L'image de la base $(e_1, \cdots, e_n)$ étant nulle par l'application linéaire φ^n,
on en déduit que φ^n est nulle et donc $M^n = 0_n$.

18. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si M a pour unique valeur propre 0 alors M est nilpotente.

M est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ et puisqu'elle admet pour unique valeur propre 0 :
$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\ M = PTP^{-1}$ où T est une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.
D'après la question 17, $M^n = PT^nP^{-1} = P0_nP^{-1} = 0_n$ donc M est nilpotente.

3 Exponentielle de matrices nilpotentes

> On définit l'exponentielle de $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ par $e^M = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$.

19. Soit $(M, N) \in (\mathcal{N}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $M = PNP^{-1}$. Montrer que $e^M = Pe^N P^{-1}$.

$$e^M = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(PNP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(PN^kP^{-1}) = P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}N^k\right)P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}N^k\right)P^{-1} = Pe^N P^{-1}$$

Ainsi $e^M = Pe^N P^{-1}$.

20. Montrer que $e^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$e^T = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} T^k = I_3 + T + \frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{6}T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 0_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21. Soit $N \in \mathbb{N}$.
On considère les matrices $M_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies pour chaque entier $i \in [\![0, N]\!]$ et chaque entier $j \in [\![0, N]\!]$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} M_{i,j} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N-i+1}^{N} M_{i,j}$ et justifier que $\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} = \sum_{s=0}^{N}\sum_{i=0}^{s} M_{i,s-i}$.

— $$\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N-i+1}^{N} M_{i,j} = \sum_{j=0}^{N} M_{0,j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=N-i+1}^{N} M_{i,j}$$
$$= \sum_{j=0}^{N} M_{0,j} + \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} + \sum_{j=N-i+1}^{N} M_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{N} M_{0,j} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{N} M_{i,j} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} M_{i,j}$$

— Représentons l'ensemble des termes de $\displaystyle\sum_{s=0}^{N}\sum_{i=0}^{s} M_{i,j}$ en rouge et ceux de $\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j}$ en bleu :

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$\cdots$	$j = N-1$	$j = N$
$i = 0$	$M_{0,0}$	$M_{0,1}$	$M_{0,2}$	$\cdots$	$M_{0,N-1}$	$M_{0,N}$
$i = 1$	$M_{1,0}$	$M_{1,1}$	$M_{1,2}$	$\cdots$	$M_{1,N-1}$	$M_{1,N}$
$i = 2$	$M_{2,0}$	$M_{2,1}$	$M_{2,2}$	$\cdots$	$M_{2,N-1}$	$M_{2,N}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$i = N-1$	$M_{N-1,0}$	$M_{N-1,1}$	$M_{N-1,2}$	$\cdots$	$M_{N-1,N-1}$	$M_{N-1,N}$
$i = N$	$M_{N,0}$	$M_{N,1}$	$M_{N,2}$	$\cdots$	$M_{N,N-1}$	$M_{N,N}$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} M_{i,j} = \sum_{s=0}^{N}\sum_{i=0}^{s} M_{i,s-i}$.

22. En déduire, en remarquant que $e^A e^B = \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!} A^i\right) \left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!} B^j\right)$, que $e^{A+B} = e^A e^B$ lorsque A et B sont deux matrices nilpotentes qui commutent.

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent.
$e^A e^B = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} A^i\right) \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} B^j\right) = \left(\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!} A^i\right) \left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!} B^j\right)$ d'après la question 10
$= \sum_{i=0}^{2n} \left(\frac{1}{i!} A^i \left(\sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{j!} B^j\right)\right) = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j \underbrace{=}_{Q21} \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n-i} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j + \sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=2n-i+1}^{2n} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j$
Or $\sum_{i=1}^{2n} \sum_{j=2n-i+1}^{2n} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=2n-i+1}^{2n} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i \underbrace{B^j}_{=0_n} + \sum_{i=n}^{2n} \sum_{j=2n-i+1}^{2n} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} \underbrace{A^i}_{=0_n} B^j = 0_n$
Ainsi $e^A e^B = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n-i} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} A^i B^j \underbrace{=}_{Q21} \sum_{s=0}^{2n} \sum_{i=0}^{s} \frac{1}{i!} \frac{1}{(s-i)!} A^i B^{s-i}$
$= \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{s!} \sum_{i=0}^{s} \frac{s!}{i!(s-i)!} A^i B^{s-i}$
$= \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{s!} \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} A^i B^{s-i} = \sum_{s=0}^{2n} \frac{1}{s!} (A+B)^s$ d'après le binôme de Newton car A et B commutent.
$= \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{s!} (A+B)^s$ d'après la question 10 ($A+B$ est bien nilpotente d'après la question 13).
$= e^{A+B}$.
Ainsi $e^{A+B} = e^A e^B$.

23. Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. En déduire que e^M est inversible et déterminer son inverse.

M et $-M$ commutent donc $e^M e^{-M} \underset{Q22}{=} e^{M+(-M)} = e^{0_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (0_n)^k = I_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 0_n = I_n$
Ainsi e^M est inversible et a pour inverse e^{-M}.

24. $E = \left\{e^M \mid M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})\right\}$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Si E était un espace vectoriel, il serait un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dès lors il contiendrait la matrice nulle, or d'après la question 23, les exponentielles de matrices sont des matrices inversibles, ce qui serait contradictoire. On en déduit donc que E n'est pas un espace vectoriel.

On appelle matrice **unipotente** toute matrice s'écrivant comme somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente.

25. Montrer que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est unipotente.

Soit $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, $e^M = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k = I_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} M^k$.
Or les matrices $\frac{1}{k!} M^k$ sont nilpotentes et commutent.
Ainsi d'après la question 13, on obtient par somme finie que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} M^k$ est nilpotente.
L'exponentielle d'une matrice nilpotente est donc bien une matrice unipotente.

4 Résolution d'un système différentiel homogène

On admet dans cette partie que : $\forall N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$, $X' = NX \Leftrightarrow X \in \left\{t \mapsto e^{tN} X_0 \mid X_0 \in \mathbb{R}^n\right\}$.

26. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} = \begin{pmatrix} t+1 & t & 3t \\ \frac{3}{2}t^2+5t & \frac{3}{2}t^2+2t+1 & \frac{9}{2}t^2+6t \\ -\frac{1}{2}t^2-2t & -\frac{1}{2}t^2-t & -\frac{3}{2}t^2-3t+1 \end{pmatrix}$ puis retrouver la réponse à la question 8.

Soit $t \in \mathbb{R}$,
$e^{tA} = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{(tA)^k}{k!} = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{6}A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} + 0_n$
Ainsi $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} = \begin{pmatrix} t+1 & t & 3t \\ \frac{3}{2}t^2+5t & \frac{3}{2}t^2+2t+1 & \frac{9}{2}t^2+6t \\ -\frac{1}{2}t^2-2t & -\frac{1}{2}t^2-t & -\frac{3}{2}t^2-3t+1 \end{pmatrix}$
De plus pour $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$:
$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{Q26}{=} \begin{pmatrix} t+1 & t & 3t \\ \frac{3}{2}t^2+5t & \frac{3}{2}t^2+2t+1 & \frac{9}{2}t^2+6t \\ -\frac{1}{2}t^2-2t & -\frac{1}{2}t^2-t & -\frac{3}{2}t^2-3t+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ -3t^2-4t-5 \\ t^2+2t+1 \end{pmatrix}$

27. Soit :
    - $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$;
    - $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$;
    - $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) + B(t)$;
    - $X_p \in \mathcal{S}$.

    Montrer que $X \in \mathcal{S} \Leftrightarrow X - X_p \in \mathcal{S}_h$.

$X - X_p \in \mathcal{S}_h \Leftrightarrow (X - X_p)' = A(X - X_p) \Leftrightarrow X' - X_p' = AX - AX_p \Leftrightarrow X' = AX - AX_p + X_p'$ or $X_p \in \mathcal{S}$
$\Leftrightarrow X' = AX - AX_p + AX_p + B \Leftrightarrow X' = AX + B \Leftrightarrow X \in \mathcal{S}$.

28. On considère le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) + B(t)$ avec $\forall t \in \mathbb{R},\ B(t) = \begin{pmatrix} -3t^2-t-1 \\ -6t^2-2t-4 \\ 3t^2+3t+2 \end{pmatrix}$

    Déterminer une solution particulière sous la forme $X_p : t \mapsto \begin{pmatrix} a \\ bt \\ ct^2 \end{pmatrix}$ avec a, b et c trois réels.

    En déduire l'ensemble des solutions du système différentiel.

$\forall t \in \mathbb{R},\ X_p'(t) = AX_p(t) + \begin{pmatrix} -3t^2-t-1 \\ -6t^2-2t-4 \\ 3t^2+3t+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bt+3ct^2 \\ 5a+2bt+6ct^2 \\ -2a-bt-3ct^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t^2-t-1 \\ -6t^2-2t-4 \\ 3t^2+3t+2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a+bt+3ct^2-3t^2-t-1 = 0 \\ 5a+2bt+6ct^2-6t^2-2t-4 = b \\ -2a-bt-3ct^2+3t^2+3t+2 = 2ct \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} (a-1)+(b-1)t+3(c-1)t^2 = 0 \\ (5a-4-b)+2(b-1)t+6(c-1)t^2 = 0 \\ -2(a-1)+(-b+3-2c)t-3(c-1)t^2 = 0 \end{cases} \text{ ces polynômes admettent une infinité de racines}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)+(b-1)X+3(c-1)X^2 = 0 \\ (5a-4-b)+2(b-1)X+6(c-1)X^2 = 0 \\ -2(a-1)+(-b+3-2c)X-3(c-1)X^2 = 0 \end{cases} \text{ ce sont donc des polynômes nuls}$$

$$\underset{\text{par identification}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a-1 = 0 \\ b-1 = 0 \\ c-1 = 0 \\ 5a-4-b = 0 \\ -b+3-2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $X_p\,:\,t\mapsto\begin{pmatrix}1\\t\\t^2\end{pmatrix}$ est une solution particulière de $\forall t\in\mathbb{R},\ X_p'(t)=AX_p(t)+\begin{pmatrix}-3t^2-t-1\\-6t^2-2t-4\\3t^2+3t+2\end{pmatrix}$

D'après la question 27, pour obtenir les solutions de $X'(t)=AX(t)+B(t)$, il suffit d'ajouter une solution particulière X_p aux solutions de $X'(t)=AX(t)$. Ainsi d'après la question 26, on obtient que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions du système différentiel est :

$$\mathcal{S}=\left\{t\mapsto\begin{pmatrix}t+1 & t & 3t\\ \frac{3}{2}t^2+5t & \frac{3}{2}t^2+2t+1 & \frac{9}{2}t^2+6t\\ -\frac{1}{2}t^2-2t & -\frac{1}{2}t^2-t & -\frac{3}{2}t^2-3t+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\t\\t^2\end{pmatrix}\ \middle|\ (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

Fin du corrigé