Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME
2024

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques MPI – MP – PSI – PC

Exponentielle de matrices

Dans ce problème on s'intéresse au calcul d'exponentielles de matrices et à son lien avec la résolution de systèmes différentiels.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ comme pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit les notations suivantes :

— $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désignera le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^\star$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

— L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sera noté $GL_n(\mathbb{K})$.

— I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera par $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique.

— On identifiera les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ avec les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

— $\mathcal{F}(\mathbb{K})$ désignera l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

— Soit x_1, x_2 et x_3 trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on définit $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}$.

— Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. En adoptant les notations précédentes, et en notant $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$,

le système d'équations différentielles d'inconnues x_1, x_2 et x_3 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + a_{1,2}x_2(t) + a_{1,3}x_3(t) \\ x_2'(t) = a_{2,1}x_1(t) + a_{2,2}x_2(t) + a_{2,3}x_3(t) \\ x_3'(t) = a_{3,1}x_1(t) + a_{3,2}x_2(t) + a_{3,3}x_3(t) \end{cases}$$

pourra donc être représenté sous forme matricielle par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$

ou de façon plus condensée par $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$ que l'on qualifiera de **système différentiel**.

— On admettra que $\forall P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),\ (PX(t))' = PX'(t)$.

1 Exemples de systèmes différentiels

On considère **dans cette partie et dans la partie 4 uniquement** les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et les trois vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AX_1, AX_2 et AX_3.

On obtient $AX_1 = X_1$, $AX_2 = -X_2$ et $AX_3 = 2X_3$.

2. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En déduire une matrice $P_A \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P_A D P_A^{-1}$.

Soit $P_A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(X_1, X_2, X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a $\det P_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1. \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^2 = 1 \neq 0$, ainsi $P_A \in GL_3(\mathbb{R})$.

(X_1, X_2, X_3) est donc une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$ et A diagonalise dans cette base.

Il vient : $A = P_A D P_A^{-1}$ avec $P_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer P_A^{-1}.

$$(P_A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$ d'où finalement $P_A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = DX(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, en notant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, il vient $X'(t) = DX(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = -y(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{cases}$

L'ensemble des solutions du système différentiel est donc $\left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} K_1 e^t \\ K_2 e^{-t} \\ K_3 e^{2t} \end{pmatrix} \ \middle|\ (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

5. En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R},\ X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow P_A^{-1} X'(t) = D P_A^{-1} X(t) \Leftrightarrow Y'(t) = DY(t)$ en posant $Y(t) = P_A^{-1} X(t)$.
On en déduit que $X(t) = P_A Y(t)$, ainsi d'après les questions 2 et 4 :

$$\exists (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^t \\ K_2 e^{-t} \\ K_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

De plus $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} K_1 + K_2 + K_3 = 1 \\ K_1 + K_3 = 0 \\ -K_2 - K_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (K_1, K_2, K_3) = (1, 1, -1)$

La solution du système différentiel recherchée est donc $t \mapsto \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} - e^{2t} \\ e^t - e^{2t} \\ -e^{-t} + e^{2t} \end{pmatrix}$

6. Montrer que $\chi_B = (X-1)(X-2)^2$.

$$\chi_B = \det(XI_3 - B) = \begin{vmatrix} X & -1 & 2 \\ 1 & X-2 & 1 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 0 & X-1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & X-2 & 1 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & X-2 & 0 \\ -1 & 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

Ainsi $\chi_B = (X-1)(X-2)^2$

7. B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Est-elle trigonalisable sur $\mathbb{R}$? On justifiera sa réponse.

B est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $BX = 2X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} y - 2z = 2x \\ -x + 2y - z = 2y \\ x - y + 3z = 2z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -2x + y - 2z = 0 \\ -x - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right.$
$\underset{L_3 \to L_3 + L_2}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{r} -2x + y - 2z = 0 \\ -x - z = 0 \\ -y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = 0$ et $z = -x \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}(X_2)$.
La dimension de l'espace propre de B associé à la valeur propre n'étant donc pas 2, il vient que B n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

8. Déterminer $P_B \in GL_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B = P_B T P_B^{-1}$.

On cherche donc 3 vecteurs U_1, U_2 et U_3 tels que $BU_1 = U_1$, $BU_2 = 2U_2$ et $BU_3 = U_2 + 2U_3$. On pouvait ici résoudre chaque système, le second ayant déjà été résolu, soit constater que X_1, X_2 et X_3 convenaient.
Ainsi $P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = P_A$ convient (et cette matrice est bien inversible d'après 2).

9. Résoudre le système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = TX(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, en notant $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, il vient $X'(t) = TX(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = 2z(t) \end{cases}$
$x'(t) = x(t)$ admet pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto K_1 e^t$ avec $K_1 \in \mathbb{R}$
$z'(t) = 2z(t)$ admet pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto K_3 e^{2t}$ avec $K_3 \in \mathbb{R}$

Déterminons les solutions de $y'(t) = 2y(t) + K_3 e^{2t}$:

— l'équation homogène associée $y'(t) = 2y(t)$ admet pour solutions les fonctions de la forme $t \mapsto K_2 e^{2t}$ avec $K_2 \in \mathbb{R}$

— cherchons une solution sous la forme $y_p : t \mapsto K_2(t)e^{2t}$ (méthode de la variation de la constante) :
$\forall t \in \mathbb{R},\ y_p'(t) = 2y_p(t) + K_3 e^{2t} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ K_2'(t)e^{2t} = K_3 e^{2t} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ K_2'(t) = K_3$.
Ainsi $K_2(t) = K_3.t$ convient et une solution particulière est $y_p\ :\ t \mapsto K_3.t.e^{2t}$

Les solutions de $y'(t) = 2y(t) + K_3 e^{2t}$ sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto K_2 e^{2t} + K_3 t e^{2t}$ avec $K_2 \in \mathbb{R}$
L'ensemble des solutions du système différentiel est donc $\left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} K_1 e^t \\ (K_2 + K_3 t)e^{2t} \\ K_3 e^{2t} \end{pmatrix} \ \middle|\ (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

10. En déduire la solution vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ du système différentiel : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = BX(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R},\ X'(t) = BX(t) \Leftrightarrow P_B^{-1}X'(t) = DP_B^{-1}X(t) \Leftrightarrow Y'(t) = TY(t)$ en posant $Y(t) = P_B^{-1}X(t)$
On en déduit que $X(t) = P_B Y(t)$, ainsi d'après les questions 8 et 9 :

$$\exists (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^t \\ (K_2 + K_3 t)e^{2t} \\ K_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

De plus $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} K_1 + K_2 + K_3 = 0 \\ K_1 + K_3 = 1 \\ -K_2 - K_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (K_1, K_2, K_3) = (0, -1, 1)$
La solution du système différentiel recherchée est donc $t \mapsto \begin{pmatrix} (t-1)e^{2t} + e^{2t} \\ e^{2t} \\ -(t-1)e^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}$

2 Exponentielle de matrices : convergence et propriétés

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, son coefficient en ligne i et colonne j sera noté $(A)_{i,j}$ ou $A_{i,j}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $||\cdot||_\infty$ définie par $||A||_\infty = \max\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |A_{i,j}|$.
On définit pour tout entier naturel k le polynôme $E_k = \sum\limits_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} X^p$.
On définit l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme étant, lorsqu'elle existe, la limite de la suite $\left(\sum\limits_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} A^p\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

11. Montrer que $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ ||AB||_\infty \leqslant n\,||A||_\infty ||B||_\infty$.

Soit $C = AB$, il vient $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ C_{i,j} = \sum\limits_{p=1}^{n} A_{i,p}B_{p,j}$. En exploitant l'inégalité triangulaire :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ |C_{i,j}| \leqslant \sum_{p=1}^{n} |A_{i,p}||B_{p,j}| \leqslant \sum_{p=1}^{n} ||A||_\infty ||B||_\infty = n\,||A||_\infty ||B||_\infty$$

Finalement $||C||_\infty \leqslant n\,||A||_\infty ||B||_\infty$

12. Montrer par récurrence que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall p \in \mathbb{N}^\star,\ ||A^p||_\infty \leqslant n^{p-1}||A||_\infty^p$.

Définissons $\mathcal{H}_p$: « $||A^p||_\infty \leqslant n^{p-1}||A||_\infty^p$ » pour tout entier naturel p.
<u>Initialisation</u> $\mathcal{H}_1$ est vraie (les deux membres de l'égalité sont égaux).
<u>Hérédité</u> soit $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathcal{H}_p$ soit vrai, il vient :

$$||A^{p+1}||_\infty = ||AA^p||_\infty \underset{Q11}{\leqslant} n||A||_\infty.||A^p||_\infty \underset{\mathcal{H}_p}{\leqslant} n^p||A||_\infty.||A||_\infty^p \leqslant n^{(p+1)-1}||A||_\infty^{p+1}$$

Ainsi $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.
<u>Conclusion</u> par récurrence : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \forall p \in \mathbb{N}^\star,\ ||A^p||_\infty \leqslant n^{p-1}||A||_\infty^p$

13. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ (E_k(A))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie, $(E_k(A))_{k\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les suites coordonnées (dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) convergent.
En s'intéressant à la ligne i et à la colonne j, on obtient la suite des coordonnées $\left(\sum\limits_{p=0}^{k} \frac{(A^p)_{i,j}}{p!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
De plus $\forall p \in \mathbb{N},\ \left|\frac{(A^p)_{i,j}}{p!}\right| \leqslant \frac{||A^p||_\infty}{p!} \leqslant n^{p-1}\frac{||A||_\infty^p}{p!} \leqslant \frac{(n||A||_\infty)^p}{p!}$
Puisque $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{(n||A||_\infty)^p}{p!}$ converge (vers $e^{n||A||_\infty}$), $\sum\limits_{p\geqslant 0} \frac{(A^p)_{i,j}}{p!}$ converge absolument et donc simplement.
Finalement $(E_k(A))_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

14. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Montrer que $e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

$$e^D = \lim_{k\to+\infty} \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} D^p = \lim_{k\to+\infty} \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \lim_{k\to+\infty} \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!} \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}\lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}\lambda_n^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

15. Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $A = PBP^{-1}$. Montrer que $e^A = Pe^BP^{-1}$.

$$e^A = \lim_{k\to+\infty}\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}(PBP^{-1})^p = \lim_{k\to+\infty}\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}(PB^pP^{-1}) = \lim_{k\to+\infty} P\left(\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}B^p\right)P^{-1}$$
$$= P\left(\lim_{k\to+\infty}\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}B^p\right)P^{-1} = Pe^BP^{-1}$$

Ainsi $e^A = Pe^BP^{-1}$.

16. En reprenant la matrice A de la partie 1, déterminer e^A.

$$e^A \underset{Q2}{=} e^{P_ADP_A^{-1}} \underset{Q15}{=} P_Ae^DP_A^{-1} \underset{Q14}{=} P_A \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} P_A^{-1}$$
$$\underset{Q3}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & e \\ e^{-1} & -e^{-1} & 0 \\ -e^2 & e^2 & -e^2 \end{pmatrix}, \text{ ainsi :}$$
$$e^A = \begin{pmatrix} e+e^{-1}-e^2 & -e^{-1}+e^2 & e-e^2 \\ e-e^2 & e^2 & e-e^2 \\ -e^{-1}+e^2 & e^{-1}-e^2 & e^2 \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e^2\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

17. Soit A et soit B deux matrices qui commutent.

On pose $\forall N \in \mathbb{N},\ \Delta_N = \left(\sum\limits_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{N}\frac{1}{j!}B^j\right) - \sum\limits_{k=0}^{N}\frac{(A+B)^k}{k!}$.

Montrer que $\forall N \in \mathbb{N},\ \Delta_N = \sum\limits_{k=N+1}^{2N}\ \sum\limits_{\substack{i+j=k\\0\leqslant i\leqslant N\\0\leqslant j\leqslant N}}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j$ et en déduire que $e^{A+B} = e^Ae^B$.

Puisque A et B commutent : $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{(A+B)^k}{k!} = \sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{1}{k!}A^iB^{k-i} = \sum\limits_{\substack{i+j=k\\i\geqslant 0\\j\geqslant 0}}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j$, ainsi :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \Delta_N = \left(\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}A^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!}B^j\right) - \sum_{k=0}^{N}\sum_{\substack{i+j=k\\i\geqslant 0\\j\geqslant 0}}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j - \sum_{k=0}^{N}\sum_{\substack{i+j=k\\i\geqslant 0\\j\geqslant 0}}\frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j.$$

Notons $M_{i,j}$ la matrice $\dfrac{1}{i!}\dfrac{1}{j!}A^iB^j$ pour tous les entiers $i \in [\![0,N]\!]$ et $j \in [\![0,N]\!]$.

Représentons en bleu les termes de $\sum\limits_{i=0}^{N}\sum\limits_{j=0}^{N}M_{i,j}$ et en rouge ceux de $\sum\limits_{k=0}^{N}\sum\limits_{\substack{i+j=k\\i\geqslant 0\\j\geqslant 0}}M_{i,j}$:

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=N-1$	$j=N$
$i=0$	$M_{0,0}$	$M_{0,1}$	$M_{0,2}$	$\cdots$	$M_{0,N-1}$	$M_{0,N}$
$i=1$	$M_{1,0}$	$M_{1,1}$	$M_{1,2}$	$\cdots$	$M_{1,N-1}$	$M_{1,N}$
$i=2$	$M_{2,0}$	$M_{2,1}$	$M_{2,2}$	$\cdots$	$M_{2,N-1}$	$M_{2,N}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$i=N-1$	$M_{N-1,0}$	$M_{N-1,1}$	$M_{N-1,2}$	$\cdots$	$M_{N-1,N-1}$	$M_{N-1,N}$
$i=N$	$M_{N,0}$	$M_{N,1}$	$M_{N,2}$	$\cdots$	$M_{N,N-1}$	$M_{N,N}$

Par différence il reste donc :

$\Delta_N = \displaystyle\sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0\leqslant i\leqslant N \\ 0\leqslant j\leqslant N}} M_{i,j} = \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0\leqslant i\leqslant N \\ 0\leqslant j\leqslant N}} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!}A^iB^j$ et d'après l'inégalité triangulaire :

$$||\Delta_N||_\infty \leqslant \sum_{k=N+1}^{2N} \sum_{\substack{i+j=k \\ 0\leqslant i\leqslant N \\ 0\leqslant j\leqslant N}} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!}||A||_\infty^i ||B||_\infty^j = \left(\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}||A||_\infty^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!}||B||_\infty^j\right) - \sum_{k=0}^{N}\frac{(||A||_\infty + ||B||_\infty)^k}{k!}$$

(d'après le même argument de sommation que précédemment).

Le membre de droite à pour limite $e^{||A||_\infty}e^{||B||_\infty} - e^{||A||_\infty + ||B||_\infty} = 0$ d'après les propriétés de l'exponentielle réelle. Finalement, par passage à la limite $\lim\limits_{N\to\infty}\Delta_N = 0$ d'où $e^{A+B} = e^A e^B$.

18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En déduire que e^A est inversible et déterminer son inverse.

$e^A e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}} = \displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}0^p_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right) = \lim_{k\to+\infty}\left(I_n + \sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p!}0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}\right) = I_n$

Ainsi e^A est inversible et a pour inverse e^{-A}.

3 Calcul avec les polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres complexes deux-à-deux distinctes : λ_1, ..., λ_n.

Pour tout entier $i \in [\![1,n]\!]$, on définit le polynôme L_i de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ par : $L_i(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\frac{X-\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k}$

On définit alors $\widetilde{L}_f$ le **polynôme interpolateur de Lagrange** de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ aux points λ_1, ..., λ_n par :

$$\widetilde{L}_f(X) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)L_i(X)$$

$\widetilde{L}_e$ sera donc le polynôme interpolateur de Lagrange de la fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$ aux points λ_1, ..., λ_n.

19. Montrer que $(L_1,\cdots,L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.

$(L_1,\cdots,L_n)$ comportant $n = \dim(\mathbb{C}_{n-1}[X])$ polynômes, il suffit de montrer la liberté de la famille :

Soit $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\alpha_pL_p = 0_{\mathbb{C}[X]}$, on obtient en évaluant en λ_i :

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \alpha_p L_p(\lambda_i) = 0_{\mathbb{C}}$ or $L_p(\lambda_i) = \delta_{p,i} = \begin{cases} 1 \text{ si } p = i \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \alpha_i = 0_{\mathbb{C}}$.
La famille est donc libre et $(L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

20. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X],\ P(X) = \widetilde{L}_P(X)$.

Soit $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
On pose $Q = P - \widetilde{L}_P$ alors $\forall j \in [\![1,n]\!],\ Q(\lambda_j) = P(\lambda_j) - \widetilde{L}_P(\lambda_j) = P(\lambda_j) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) L_i(\lambda_j)$
$= P(\lambda_j) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i)\delta_{i,j} = P(\lambda_j) - P(\lambda_j) = 0$
De plus $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ car $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\widetilde{L}_P \in \underset{i \in [\![1,n]\!]}{\mathrm{Vect}} (L_i) \subseteq \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Ainsi Q est le polynôme nul car il admet n racines distinctes mais est de degré au plus $n-1$.
D'où finalement $P = \widetilde{L}_P$.

21. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists R_k \in \mathbb{C}_{n-1}[X],\ E_k(A) = R_k(A)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, effectuons la division euclidienne de E_k par χ_A :

$$\exists!(Q_k, R_k),\ E_k = \chi_A Q_k + R_k \text{ avec } \deg R_k < \deg \chi_A = n$$

En évaluant en A on obtient d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $E_k(A) = R_k(A)$ et $R_k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

22. Montrer que e^A est un polynôme en A.

Posons $F = \underset{p \in [\![0,n-1]\!]}{\mathrm{Vect}} (A^p)$.
Or d'après la question 21 on a (en reprenant les notations) : $\forall k \in \mathbb{N},\ R_k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ d'où $\forall k \in \mathbb{N},\ R_k(A) \in F$
Par ailleurs F est de dimension finie donc il admet une base $(F_1, \cdots, F_N)$ avec $N \leqslant n-1$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists!(c_1^k, \cdots, c_N^k) \in \mathbb{C}^N,\ R_k(A) = \sum_{p=1}^{N} c_p^k F_p$$

Or F est de dimension finie, donc l'existence de la limite de $(R_k(A))_{k\in\mathbb{N}}$ équivaut à l'existence des limites de ses coordonnées $(c_1^k, \cdots, c_n^k)$; et dans ce cas $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} R_k(A) = \sum_{p=1}^{N} \lim_{k\to+\infty} (c_p^k) F_p \in F$
Il vient alors $e^A = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} E_k(A) \underset{Q21}{=} \lim_{k\to+\infty} \underbrace{R_k(A)}_{\in F} \in F$ donc e^A est un polynôme en A.
Remarque : on pouvait également montrer que F était fermé en tant qu'image réciproque de $\{0\}$ par l'application (continue) de projection sur un supplémentaire de F (puisque $M_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie) et parallèlement à F.

23. Soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$ et soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $M = PNP^{-1}$.
Montrer que $\forall Q \in \mathbb{C}[X],\ Q(M) = PQ(N)P^{-1}$.

Soit Q un polynôme à valeurs complexes et de degré $d \in \mathbb{N}$, alors : $\exists(q_0, \cdots, q_p) \in \mathbb{C}^{p+1},\ Q = \displaystyle\sum_{p=0}^{d} q_p X^p$

$$Q(M) = \sum_{p=0}^{d} q_p M^p = \sum_{p=0}^{d} q_p \left(PNP^{-1}\right)^p = \sum_{p=0}^{d} q_p P N^p P^{-1} = P\left(\sum_{p=0}^{d} q_p N^p\right) P^{-1} = PQ(N)P^{-1}$$

Ainsi $\forall Q \in \mathbb{C}[X],\ Q(M) = PQ(N)P^{-1}$.

24. Soit $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$. Montrer que $e^D = P^{-1}\widetilde{L}_e(A)P$.

$e^D \underset{Q14}{=} \begin{pmatrix} \widetilde{L}_e(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \widetilde{L}_e(\lambda_n) \end{pmatrix} = \widetilde{L}_e(D) = \widetilde{L}_e(P^{-1}AP) \underset{Q23}{=} P^{-1}\widetilde{L}_e(A)P$ ainsi $e^D = P^{-1}\widetilde{L}_e(A)P$.

25. En déduire que $e^A = \widetilde{L}_e(A)$.

On a vu en question 24 que $e^D = P^{-1}\widetilde{L}_e(A)P$, de plus $e^D = P^{-1}e^AP$ d'après la question 15, d'où par transitivité $P^{-1}\widetilde{L}_e(A)P = P^{-1}e^AP$ et donc $e^A = \widetilde{L}_e(A)$.

4 Résolution d'un système différentiel homogène

On admet dans cette partie que : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ,\ X' = MX \Leftrightarrow X \in \{t \mapsto e^{tM}X_0 \mid X_0 \in \mathbb{R}^n\}$.

Dans cette partie on considère à nouveau les matrices A, B et T telles que définies **dans la partie 1**.

26. $E = \{e^{tA} \mid t \in \mathbb{R}\}$ est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

Si E était un espace vectoriel, il serait un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dès lors il contiendrait la matrice nulle, or d'après la question 18, les exponentielles de matrices sont des matrices inversibles, ce qui est absurde. On en déduit donc que E n'est pas un espace vectoriel.

27. En utilisant la question 25, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^\star,\ e^{tA} = \frac{1}{6}\left(-3e^t(A+I_3)(A-2I_3) + e^{-t}(A-I_3)(A-2I_3) + 2e^{2t}(A+I_3)(A-I_3)\right)$$

Soit $t \in \mathbb{R}^\star$, Les valeurs propres de C sont 1, -1 et 2 donc celles de tA sont t, $-t$ et $2t$.
Ces valeurs étant distinctes, on peut considérer $\widetilde{L}_e$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction exponentielle complexe aux points $\lambda_1 = t$, $\lambda_2 = -t$ et $\lambda_3 = 2t$, il vient :
$\widetilde{L}_e = e^t\dfrac{(X+t)(X-2t)}{(t+t)(t-2t)} + e^{-t}\dfrac{(X-t)(X-2t)}{(-t-t)(-t-2t)} + e^{2t}\dfrac{(X+t)(X-t)}{(2t+t)(2t-t)}$
$= e^t\dfrac{(X+t)(X-2t)}{(t+t)(t-2t)} + e^{-t}\dfrac{(X-t)(X-2t)}{(-t-t)(-t-2t)} + e^{2t}\dfrac{(X+t)(X-t)}{(2t+t)(2t-t)}$
$= \dfrac{e^t}{-2t^2}(X+t)(X-2t) + \dfrac{e^{-t}}{6t^2}(X-t)(X-2t) + \dfrac{e^{2t}}{3t^2}(X+t)(X-t)$
$= \dfrac{1}{6t^2}\left(-3e^t(X+t)(X-2t) + e^{-t}(X-t)(X-2t) + 2e^{2t}(X+t)(X-t)\right)$

De plus d'après la question 25, on a $\forall t \in \mathbb{R}^\star,\ e^{tA} = \widetilde{L}_e(tA)$ d'où :
$\forall t \in \mathbb{R}^\star, e^{tA} = \dfrac{1}{6t^2}\left(-3e^t(tA+tI_3)(tA-2tI_3) + e^{-t}(tA-tI_3)(tA-2tI_3) + 2e^{2t}(tA+tI_3)(tA-tI_3)\right)$
$= \dfrac{1}{6}\left(-3e^t(A+I_3)(A-2I_3) + e^{-t}(A-I_3)(A-2I_3) + 2e^{2t}(A+I_3)(A-I_3)\right)$

28. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-t}+e^t-e^{2t} & e^{2t}-e^{-t} & e^t-e^{2t} \\ e^t-e^{2t} & e^{2t} & e^t-e^{2t} \\ e^{2t}-e^{-t} & e^{-t}-e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$,

- si $t = 0$ alors $e^{tA} = e^0 = I_3$ d'après la question 14
- si $t \neq 0$

  $\forall t \in \mathbb{R}^\star, e^{tA} \underbrace{=}_{Q27} \dfrac{1}{6}\left(-3e^t(A+I_3)(A-2I_3) + e^{-t}(A-I_3)(A-2I_3) + 2e^{2t}(A+I_3)(A-I_3)\right)$

Or $(A+I_3)(A-2I_3)=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-1&3&-1\\3&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&3&-1\\-1&0&-1\\3&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&-2\\-2&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$(A-I_3)(A-2I_3)=\begin{pmatrix}-3&3&-1\\-1&1&-1\\3&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&3&-1\\-1&0&-1\\3&-3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-6&0\\0&0&0\\-6&6&0\end{pmatrix}$

et $(A+I_3)(A-I_3)=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-1&3&-1\\3&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&3&-1\\-1&1&-1\\3&-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&3&-3\\-3&3&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$

Ainsi $\forall t\in\mathbb{R}^\star,\ e^{tA}=e^t\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$

Finalement $\forall t\in\mathbb{R},\ e^{tA}=\begin{pmatrix}e^{-t}+e^t-e^{2t}&e^{2t}-e^{-t}&e^t-e^{2t}\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&e^t-e^{2t}\\e^{2t}-e^{-t}&e^{-t}-e^{2t}&e^{2t}\end{pmatrix}$, la formule restant vraie pour $t=0$.

29. Retrouver la réponse à la question 5.

$\forall t\in\mathbb{R},\ X(t)=e^{tA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-t}+e^t-e^{2t}&e^{2t}-e^{-t}&e^t-e^{2t}\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&e^t-e^{2t}\\e^{2t}-e^{-t}&e^{-t}-e^{2t}&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t+e^{-t}-e^{2t}\\e^t-e^{2t}\\-e^{-t}+e^{2t}\end{pmatrix}$.

30. Montrer que $\forall t\in\mathbb{R},\ e^{tT}=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}$.

On remarque que $D_T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $N_T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ commutent, on pourra donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$\forall t\in\mathbb{R},\ e^{tT}=e^{t(D_T+N_T)}=\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}(D_T+N_T)^k=\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}D_T^{k-i}N_T^i$ or $N_T^2=0$ d'où :

$\forall t\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{N}^\star,\ \sum\limits_{i=0}^{k}\binom{k}{i}D_T^{k-i}N_T^i=\sum\limits_{i=0}^{1}\binom{k}{i}D_T^{k-i}N_T^i=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^k&k2^{k-1}\\0&0&2^k\end{pmatrix}$

On remarque que cette égalité reste valide pour $k=0$, ainsi :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ e^{tT}=\lim_{k\to+\infty}\sum_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^k&k2^{k-1}\\0&0&2^k\end{pmatrix}=\lim_{k\to+\infty}\begin{pmatrix}\sum\limits_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}&0&0\\0&\sum\limits_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}2^k&\sum\limits_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}k2^{k-1}\\0&0&\sum\limits_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}2^k\end{pmatrix}$$

Or $\sum\limits_{k=0}^{p}\frac{t^k}{k!}k2^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{t^k}{(k-1)!}2^{k-1}=\sum\limits_{k=0}^{p-1}\frac{t^{k+1}}{k!}2^k=t\sum\limits_{k=0}^{p}\frac{(2t)^k}{k!}$, d'où en passant à la limite :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ e^{tT}=\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}$$

31. Montrer que $\forall t\in\mathbb{R},\ e^{tB}=\begin{pmatrix}e^t-te^{2t}&te^{2t}&e^t-(t+1)e^{2t}\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&e^t-e^{2t}\\te^{2t}&-te^{2t}&(t+1)e^{2t}\end{pmatrix}$.

$\forall t\in\mathbb{R},\ e^{tB}=e^{tP_ATP_A^{-1}}=e^{P_A(tT)P_A^{-1}}\underset{Q15}{=}P_Ae^{tT}P_A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & e^t \\ (1-t)e^{2t} & (t-1)e^{2t} & -te^{2t} \\ -e^{2t} & e^{2t} & -e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t - te^{2t} & te^{2t} & e^t - (t+1)e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ te^{2t} & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t - te^{2t} & te^{2t} & e^t - (t+1)e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ te^{2t} & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$.

32. Retrouver la réponse à la question 10.

$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{tB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{Q31}{=} \begin{pmatrix} e^t + (1-2t)e^{2t} & te^{2t} & e^t - (t+1)e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ (2t-1)e^{2t} & -te^{2t} & (t+1)e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}$.

Fin du corrigé