Corrigé de l'épreuve de mathématiques (Option MP - 2h)

1°) *Un premier exemple de transformée de Fourier*

a) L'intégrale $F(t)$ est définie pour tout réel t puisque la fonction de la variable u figurant sous le signe intégral est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car :

$$\left| e^{-\pi u^2} e^{-2 i \pi t u} \right| = e^{-\pi u^2} \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

La fonction $t \mapsto F(t)$ est une intégrale dépendant du paramètre t, qui est de classe C^1 car :

- la fonction $t \mapsto e^{-\pi u^2} e^{-2 i \pi u t}$ est de classe C^1 pour tout réel u, et sa dérivée est :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\pi u^2} e^{-2 i \pi t u}\right) = -2 i \pi u\, e^{-\pi u^2} e^{-2 i \pi t u}.$$

- Cette dérivée est continue en chacune de ses variables, et elle est dominée indépendamment du paramètre t par une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}$ car :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \left| -2 i \pi u\, e^{-\pi u^2} e^{-2 i \pi t u} \right| = 2 \pi |u|\, e^{-\pi u^2} \underset{\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right).$$

Il en résulte que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$F'(t) = i \int_{-\infty}^{+\infty} -2 \pi u\, e^{-\pi u^2} e^{-2 i \pi t u}\, \mathrm{d}u\,.$$

b) Procédons par intégration par parties :

$$F'(t) = i\left[e^{-\pi u^2} e^{-2 i \pi t u}\right]_{-\infty}^{+\infty} - 2 \pi t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2} e^{-2 i \pi t u}\, \mathrm{d}u\,.$$

Comme $\left|e^{-\pi u^2} e^{-2 i \pi u t}\right| = e^{-\pi u^2}$ dont la limite en $\pm\infty$ est nulle, le crochet est nul et il reste :

$$F'(t) = -\, 2 \pi t\, F(t).$$

c) Intégrons cette équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre :

$$F'(t) + 2 \pi t\, F(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\pi t^2} F(t)\right) = 0.$$

Il en résulte que $e^{\pi t^2} F(t) = F(0)$ pour tout réel t, et comme $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\, \mathrm{d}u = 1$, on voit que $F(t) = e^{-\pi t^2}$, autrement dit $f : u \mapsto e^{-\pi u^2}$ est égale à sa transformée de Fourier.

2°) *Un second exemple de transformée de Fourier*

a) Si $\mathrm{Re}(a) > 0$, la fonction continue $u \mapsto e^{-a u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $|e^{-a u}| = e^{-\mathrm{Re}(a)\, u} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ et on a par intégration immédiate, compte tenu de $\lim_{+\infty} |e^{-a u}| = \lim_{+\infty} e^{-\mathrm{Re}(a)\, u} = 0$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-a u}\, \mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{a}\, e^{-a u}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

b) La fonction $g_n : u \mapsto \exp\left(-\frac{2\pi|u|}{n}\right)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car elle est $o\left(\frac{1}{u^2}\right)$ en $\pm\infty$) et en séparant les cas $u \leq 0$ et $u \geq 0$, sa transformée de Fourier est égale à :

$$Tg_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t u}\, g_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi\left(-\frac{1}{n}+i t\right)u}\,\mathrm{d}u + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\pi\left(\frac{1}{n}+i t\right)u}\,\mathrm{d}u.$$

Quitte à poser $v = -u$ dans l'intégrale sur $\mathbb{R}_-$, il vient en exploitant le résultat précédent :

$$Tg_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t u}\, g_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{+\infty} e^{-2\pi\left(\frac{1}{n}-i t\right)v}\,\mathrm{d}v + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\pi\left(\frac{1}{n}+i t\right)u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2\pi\left(\frac{1}{n}-i t\right)} + \frac{1}{2\pi\left(\frac{1}{n}+i t\right)} = \frac{n}{\pi\left(1+n^2 t^2\right)}.$$

On en tire que Tg_n est à valeurs positives, et $\sup\limits_{|t|\geq\alpha} Tg_n(t) = \sup\limits_{|t|\geq\alpha} \frac{n}{\pi\left(1+n^2 t^2\right)} = \frac{n}{\pi\left(1+n^2\alpha^2\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n \alpha^2}$.

Cette expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

c) Une intégration facile conduit à :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tg_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n\,\mathrm{d}t}{\pi\left(1+n^2 t^2\right)} = \left[\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}(n\,t)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

Et on obtient de même en exploitant la parité sur $\mathbb{R}$ de Tg_n :

$$\int_{|t|\geq\alpha} Tg_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{\alpha}^{+\infty} Tg_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{n\,\mathrm{d}t}{\pi\left(1+n^2 t^2\right)} = \left[\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n\,t)\right]_{\alpha}^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc\,tan}(n\,\alpha)\right) = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n\,\alpha) \text{ ou } \frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n\,\alpha}\right).$$

Cette expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3°) *Premières propriétés de la transformation de Fourier*

a) Pour tout réel t, la fonction $u \mapsto e^{-2i\pi t u} f(u)$ est continue par morceaux et intégrable puisque $\left|e^{-2i\pi u t} f(u)\right| = |f(u)|$, et f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc l'intégrale définissant $Tf(t)$ a un sens.

- La fonction $t \mapsto Tf(t)$ est une intégrale dépendant du paramètre t, qui est continue car :
- la fonction $t \mapsto e^{-2i\pi t u} f(u)$ est continue pour tout réel u.
- la fonction $u \mapsto e^{-2i\pi t u} f(u)$ est dominée indépendamment du paramètre t par une fonction continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}$ car : $\forall\, u \in \mathbb{R},\ \left|e^{-2i\pi t u} f(u)\right| = |f(u)|$.

- La fonction $t \mapsto Tf(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ puisqu'on a :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\quad |Tf(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t u} f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|\,\mathrm{d}u = \|f\|_1.$$

b) Considérons l'intégrale $A(x) = \int_{-\infty}^{x} Tf(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto Tf(t)\, g(t)$ est continue (comme produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$) et intégrable sur $\mathbb{R}$, donc sur $]-\infty, x]$, selon l'inégalité suivante : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ |Tf(t)\, g(t)| \leq \|f\|_1\, |g(t)|$ et l'hypothèse d'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}$.

- Considérons l'intégrale $B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

  La fonction $t \mapsto \int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}$ (il suffit de raisonner comme on l'a fait au a) ci-dessus pour établir la continuité de l'intégrale dépendant d'un paramètre $T f$).

  Comme f est continue par morceaux, la fonction $t \mapsto f(t) \int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u$ l'est donc aussi, et elle est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la majoration suivante et l'hypothèse d'intégrabilité de f :

$$\left| f(t) \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u \right) \right| \leq |f(t)| \int_{-\infty}^{x} |g(u)|\, \mathrm{d}u \leq |f(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|\, \mathrm{d}u = \|g\|_1\, |f(t)|.$$

  L'intégrale $B(x)$ est donc définie pour tout réel x.

c) Considérons la fonction $x \mapsto A(x) = \int_{-\infty}^{x} Tf(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$.

Comme la fonction $t \mapsto Tf(t)\, g(t)$ est continue, A en est une primitive et sa dérivée est :

$$A'(x) = Tf(x)\, g(x) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x u} f(u)\, \mathrm{d}u \right) g(x).$$

- Considérons la fonction $x \mapsto B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t$.

  Appliquons lui le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre :

- la fonction $x \mapsto f(t) \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u \right)$ est de classe C^1 pour tout réel t, et sa dérivée est :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(f(t) \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u \right) \right) = e^{-2i\pi t x} f(t)\, g(x).$$

- Cette dérivée est continue par morceaux en la variable t, continue en la variable x, et dominée indépendamment du paramètre x par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (car f est intégrable sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left| e^{-2i\pi x u} f(t)\, g(x) \right| \leq \|g\|_\infty\, |f(t)|.$$

  Il en résulte que B est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$B'(x) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x t} f(t)\, \mathrm{d}t \right) g(x) = Tf(x)\, g(x).$$

d) Comme la fonction $t \mapsto Tf(t)\, g(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, il est clair que :

$$\lim_{x \to -\infty} A(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} Tf(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} A(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} Tf(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

- Cherchons les limites de $B(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\int_{-x}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}t$ quand x tend vers $\pm\infty$.

  On applique le théorème de convergence dominée avec le paramètre réel x :

- *Limite de l'expression sous le signe intégral lorsque x tend vers $\pm\infty$*

  pour tout réel t, on a $\lim_{x \to -\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u \right) = 0$.

  pour tout réel t, on a $\lim_{x \to +\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u \right) = f(t)\, Tg(t)$.

  Cette fonction est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

- *Domination de l'expression sous le signe intégral indépendamment de x*

  la fonction $t \mapsto f(t) \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u \right)$ est dominée indépendamment du paramètre x par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (car f est intégrable sur $\mathbb{R}$) :

$$\left| f(t) \left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi t u} g(u)\, \mathrm{d}u \right) \right| \leq |f(t)| \int_{-\infty}^{x} |g(u)|\, \mathrm{d}u \leq |f(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(u)|\, \mathrm{d}u = \|g\|_1\, |f(t)|.$$

On peut donc passer à la limite sous le signe intégral, ce qui donne successivement :

$$\lim_{x\to-\infty} B(x) = \lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi tu}\, g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \;=\; 0.$$

$$\lim_{x\to+\infty} B(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi tu}\, g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{x} e^{-2i\pi tu}\, g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, Tg(t)\,\mathrm{d}t.$$

e) On a établi que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $A'(x) = B'(x)$, de sorte qu'il existe un réel C tel que : $A(x) - B(x) = C$.
Et comme $A(x)$ et $B(x)$ ont même limite 0 en -∞, on en tire que $C = 0$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $A(x) = B(x)$.
Comme les fonctions A et B sont égales, leurs limites en $+\infty$ sont égales, ce qui donne bien :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, Tg(t)\,\mathrm{d}t.$$

4°) *Inversion de la transformation de Fourier*

a) La fonction f est par hypothèse continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, et la fonction g est continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ car $|g(u)| = |g_n(u)| = \exp\left(-\frac{2\pi|u|}{n}\right)$, et bornée car $|g(u)| = |g_n(u)| \le 1$.

Les hypothèses de la question 3° sont donc vérifiées et on peut appliquer la formule 3.e).
Remarquons de plus qu'on a :

$$Tg(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{-2i\pi tu}\,\mathrm{d}u \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\, e^{-2i\pi(t-x)u}\,\mathrm{d}u \;=\; Tg_n(t-x).$$

La formule obtenue en 3.e) s'écrit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, Tg(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, Tg_n(t-x)\,\mathrm{d}t.$$

En remplaçant $g(t) = e^{2i\pi xt}\, g_n(t)$ et en posant $\tau = t - x$ dans la dernière intégrale, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, e^{2i\pi xt}\, g_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\tau)\, Tg_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Comme on a établi à la question 2° que $\int_{-\infty}^{+\infty} Tg_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1$, on en tire immédiatement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, e^{2i\pi xt}\, g_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; f(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\tau) - f(x))\, Tg_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

b) Cherchons la limite de la première intégrale à l'aide du théorème de convergence dominée.

Considérons à cet effet la suite des fonctions : $t \mapsto Tf(t)\, e^{2i\pi xt}\, g_n(t) = Tf(t)\, e^{2i\pi xt}\, e^{-\frac{2\pi|t|}{n}}$.

- celle-ci converge simplement vers la fonction continue $t \mapsto Tf(t)\, e^{2i\pi xt}$.
- celle-ci est dominée par la fonction $|Tf|$ qu'on a supposé ici intégrable puisqu'on a :

$$\left|Tf(t)\, e^{2i\pi xt}\, g_n(t)\right| \;=\; \left|Tf(t)\, e^{2i\pi xt}\, e^{-\frac{2\pi|t|}{n}}\right| \;=\; |Tf(t)|\, e^{-\frac{2\pi|t|}{n}} \;\le\; |Tf(t)|.$$

Il en résulte qu'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, e^{2i\pi xt}\, g_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} Tf(t)\, e^{2i\pi xt}\, g_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, e^{2i\pi xt}\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, e^{2i\pi xt}\, g_n(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} Tf(t)\, e^{2i\pi xt}\,\mathrm{d}t \;=\; \overline{T}(Tf)(x).$$

c) On suppose maintenant que **le réel x est un point de continuité de la fonction f** :

$$(\forall\, \varepsilon > 0),\ (\exists\, \alpha > 0),\ (\forall\, \tau \in \mathbb{R}) :\quad |\tau| \le \alpha \quad \Longrightarrow \quad |f(x+\tau) - f(x)| \le \varepsilon.$$

L'inégalité de la moyenne donne, compte tenu de la positivité de Tg_n :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\tau) - f(x))\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\tau) - f(x)|\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

En découpant $\mathbb{R}$ en $]-\infty, -\alpha] \cup [-\alpha, \alpha] \cup [\alpha, +\infty[$, on coupe alors l'intégrale précédente en trois intégrales qu'on va majorer successivement en tenant compte des résultats du 2° :

■ Sur $[-\alpha, \alpha]$, la continuité de f en x donne :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x+\tau) - f(x)|\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau \le \varepsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau \le \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \varepsilon.$$

■ Sur $]-\infty, -\alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$, c'est à dire pour $|t| \ge \alpha$, l'inégalité triangulaire donne :

$$\int_{|\tau|\ge\alpha} |f(x+\tau) - f(x)|\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau \le \int_{|\tau|\ge\alpha} |f(x+\tau)|\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau + |f(x)| \int_{|\tau|\ge\alpha} Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

$$\le \left(\sup_{|\tau|\ge\alpha} Tg_n(\tau) \right) \int_{|\tau|\ge\alpha} |f(x+\tau)|\, \mathrm{d}\tau + |f(x)| \int_{|\tau|\ge\alpha} Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Quitte à poser $t = x + \tau$ dans l'avant-dernière intégrale et à majorer par l'intégrale sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\int_{|\tau|\ge\alpha} |f(x+\tau) - f(x)|\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau \le \left(\sup_{|\tau|\ge\alpha} Tg_n(\tau) \right) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t + |f(x)| \int_{|\tau|\ge\alpha} Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

$$= \left(\sup_{|\tau|\ge\alpha} Tg_n(\tau) \right) \|f\|_1 + |f(x)| \int_{|\tau|\ge\alpha} Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Il en résulte par addition des intégrales qu'on a donc :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\tau) - f(x))\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \le \varepsilon + \left(\sup_{|\tau|\ge\alpha} Tg_n(\tau) \right) \|f\|_1 + |f(x)| \int_{|\tau|\ge\alpha} Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Chacun des deux derniers termes tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ d'après la question 2°, et peut donc être rendu inférieur à ε pour n assez grand ($n \ge N$), ce qui permet de conclure que :

$$(\forall\, \varepsilon > 0),\ (\exists\, N \in \mathbb{N}),\ (\forall\, n \in \mathbb{N}) :\ n \ge N \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\tau) - f(x))\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \le 3\,\varepsilon.$$

Autrement dit, on a donc par définition même d'une limite :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+\tau) - f(x))\, Tg_n(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0.$$

d) Par passage à la limite dans l'égalité 4.a), on déduit de 4.b) et 4.c) la relation suivante, valable en tout point de continuité x de f lorsque f et Tf sont intégrables sur $\mathbb{R}$: $\overline{T}(Tf)\,(x) = f(x)$.
Lorsque f est continue, intégrable et de transformée de Fourier intégrable sur $\mathbb{R}$, cette égalité a lieu en tout point x, de sorte qu'on a alors : $\overline{T}(Tf) = f$.

5°) *Application à la recherche d'autres transformées de Fourier*

a) On a établi à la question 2° qu'avec $g_1(u) = e^{-2\pi|u|}$, on a $Tg_1(u) = \frac{1}{\pi(1+u^2)}$.

Comme g_1 et $G_1 = \pi\, Tg_1$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le résultat du 4°, d'où l'égalité : $\overline{T}\, G_1 = \pi\, \overline{T}(Tg_1) = \pi\, g_1$

Et comme $\overline{T}\, G_1(t) = T\, G_1(-t)$, on a : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $TG_1(t) = \pi\, g_1(-t) = \pi\, e^{-2\pi|t|}$.

b) La transformée de Fourier de la fonction $h_0 = u \mapsto e^{-a\,u}$ si $u \geq 0$, 0 si $u \leq 0$ est égale à :

$$Th_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\,i\,\pi\,u\,t}\, h_0(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{-(a+2\,i\,\pi\,t)\,u}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{e^{-(a+2\,i\,\pi\,t)\,u}}{a+2\,i\,\pi\,t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+2\,i\,\pi\,t}.$$

Maintenant, une intégration par parties donne pour $n \geq 1$:

$$Th_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\,i\,\pi\,u\,t}\, h_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!}\, e^{-(a+2\,i\,\pi\,t)\,u}\,\mathrm{d}u$$

$$= \left[-\frac{u^n}{n!}\,\frac{e^{-(a+2\,i\,\pi\,t)\,u}}{a+2\,i\,\pi\,t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{a+2\,i\,\pi\,t}\int_0^{+\infty}\frac{u^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-(a+2\,i\,\pi\,t)\,u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a+2\,i\,\pi\,t}\,Th_{n-1}(t).$$

Il en résulte par récurrence immédiate qu'on a :

$$Th_n(t) = \frac{1}{a+2\,i\,\pi\,t}\,Th_{n-1}(t) = \left(\frac{1}{a+2\,i\,\pi\,t}\right)^n Th_0(t) = \left(\frac{1}{a+2\,i\,\pi\,t}\right)^{n+1}.$$

c) Pour $n \geq 1$, les fonctions h_n et $H_n = Th_n$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que $\overline{T}\,H_n = \overline{T}(Th_n) = h_n$ et comme $\overline{T}\,H_n(t) = T\,H_n(-t)$, on a pour $n \geq 1$:

$$TH_n(t) = \overline{T}\,H_n(-t) = h_n(-t) = \left| \begin{array}{l} 0 \quad \text{si} \quad t > 0 \\ \frac{(-t)^n}{n!}\,e^{a\,t} \quad \text{si} \quad t \leq 0. \end{array} \right.$$

Ce raisonnement ne peut s'appliquer au cas $n = 0$ puisque H_0 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$, donc sa transformée de Fourier au sens introduit dans ce problème n'est pas définie.