

Concours CPGE 2019

Corrigé Epreuve de Sciences Industrielles

Pilotage d'un imprimante 3D

Durée : 2 heures

L'utilisation de calculatrices est interdite. La consultation de documents est interdite.

Le sujet comporte 8 pages.

Présentation

L'impression 3D est de plus en plus répandue. Elle permet de manière très pratique de passer d'une modélisation informatique réalisée à l'aide d'un modèleur volumique à une pièce physique en matière plastique.

L'impression 3D consiste en le dépôt de couche par couche d'un filament préalablement chauffé par une tête d'impression.

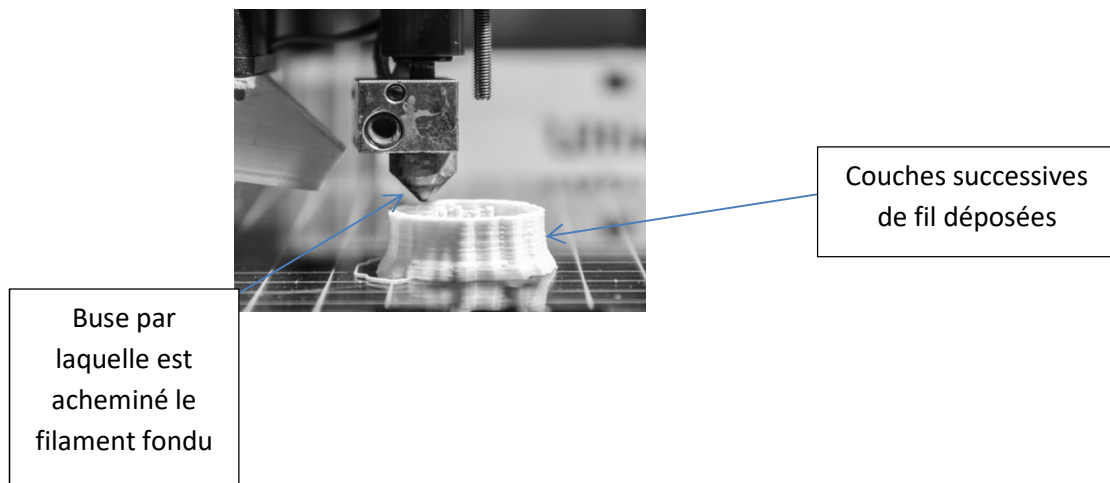


Figure 1 : Principe de l'impression 3D

Le thème de cette étude est le pilotage et le dimensionnement d'une imprimante 3D de type delta (Figure 2).

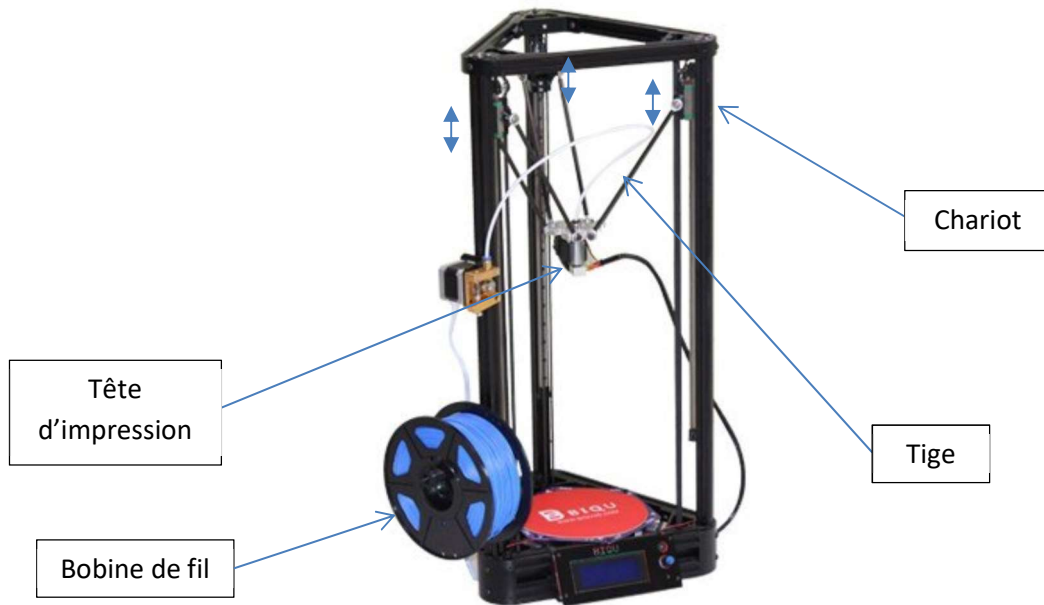


Figure 2 : Imprimante 3D de type delta

L'imprimante est constituée par un bâti, 3 moteurs électriques actionnant 3 dispositifs poulie-courroie. Sur chacune des courroies est accroché un chariot translatant verticalement le long d'un bâti. Sur chacun des chariots, 2 tiges sont accrochées (en liaison sphérique avec chacun des charriots). La tête d'impression est suspendue à ces 6 tiges en (liaison sphérique entre chacune des tiges et la tête d'impression).

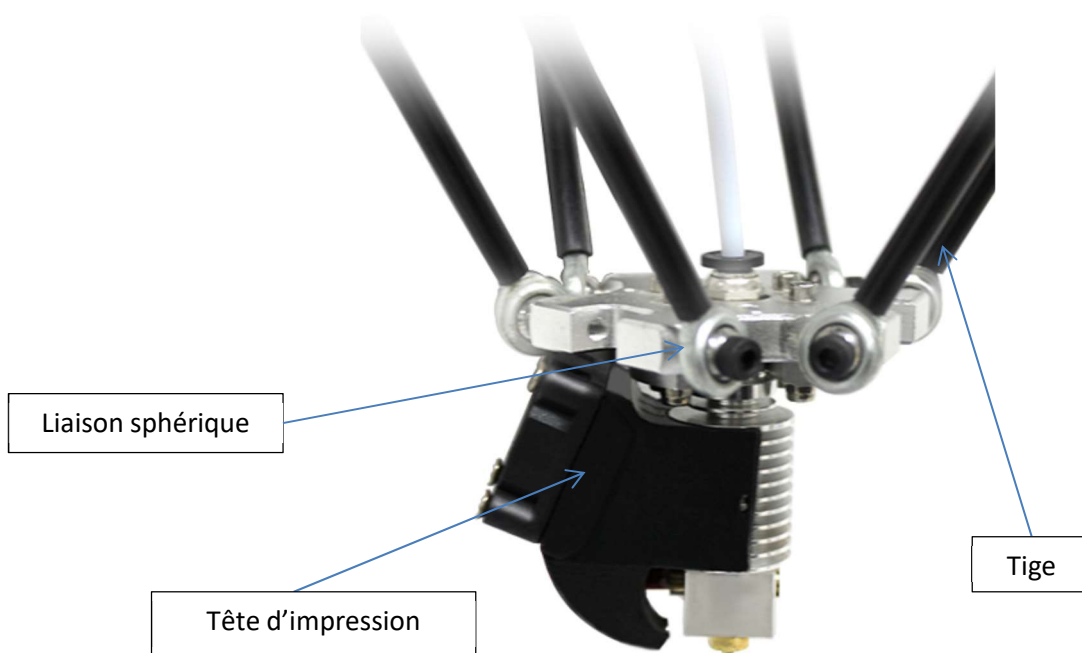


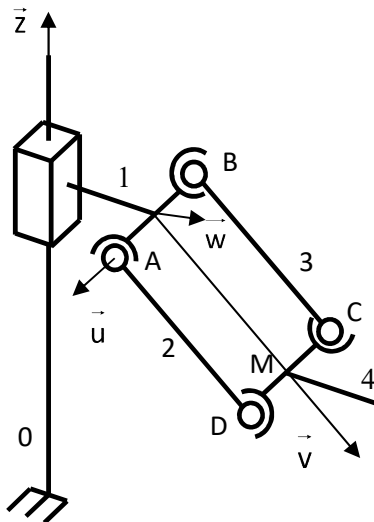
Figure 3 : Tête d'impression

Partie 1 : Mouvement de la tête d'impression

L'objectif de cette partie est de déterminer, à partir de la géométrie de l'imprimante, le mouvement de la tête d'impression.

Modélisation :

L'imprimante comporte 3 structures identiques parallèles dont une seule est schématisée Figure 4. Ces trois structures sont réparties à 120°. L'imprimante est constituée d'un bâti 0 et de trois structures comportant chacune un chariot et 2 tiges. La structure représentée Figure 4 comporte un chariot 1 en translation verticale de direction \vec{z} avec le bâti 0, de deux tiges 2 et 3 en liaison sphérique avec le chariot 1. Enfin la tête d'impression 4 est en liaison avec les deux tiges 2 et 3.



$$AB=CD=2a$$

$$CM=DM=a \quad (\text{M est le milieu de CD})$$

$$AD=BC=b$$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormée directe.

Figure 4 : Schéma cinématique d'une des structures parallèles

On cherche à déterminer dans un premier temps la liaison équivalente L14 entre le solide 1 et le solide 4.

Notations : On notera le torseur cinématique du solide i par rapport au solide j au point M projeté dans la base

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) : V_{i/j} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_{ij} \mid \mathbf{u}_{ij} \\ \mathbf{q}_{ij} \mid \mathbf{v}_{ij} \\ \mathbf{r}_{ij} \mid \mathbf{w}_{ij} \end{array} \right\}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$$

1. En passant par la chaîne 1-2-4, déterminer la vitesse de rotation de la tête 4 par rapport au chariot 1 $\overline{\Omega}_{4/1}^1$ en fonction de $p_{21}, p_{42}, q_{21}, q_{42}, r_{21}, r_{42}$.

$$\overline{\Omega}_{4/1}^1 = \begin{pmatrix} p_{42} + p_{21} \\ q_{42} + q_{21} \\ r_{42} + r_{21} \end{pmatrix}$$

2. En passant par la chaîne 1-3-4, déterminer la vitesse de rotation de la tête 4 par rapport au chariot 1 $\overline{\Omega}_{4/1}^2$ en fonction de $p_{31}, p_{43}, q_{31}, q_{43}, r_{31}, r_{43}$.

$$\overrightarrow{\Omega}_{4/1}^2 = \begin{pmatrix} p_{43} + p_{31} \\ q_{43} + q_{31} \\ r_{43} + r_{31} \end{pmatrix}$$

3. En passant par la chaîne 1-2-4, déterminer la vitesse de M dans le mouvement de 4 par rapport à 1 $\overrightarrow{V}_{M,4/1}^1$ en fonction de p_{21} , p_{42} , q_{21} , q_{42} , r_{21} , r_{42} et des constantes du problème.

$$\overrightarrow{V}_{M,4/1}^1 = \begin{pmatrix} -b.r_{21} \\ -a.(r_{42} + r_{21}) \\ b.p_{21} + a.(q_{42} + q_{21}) \end{pmatrix}$$

4. En passant par la chaîne 1-3-4, déterminer la vitesse de M dans le mouvement de 4 par rapport à 1 $\overrightarrow{V}_{M,4/1}^2$ en fonction de p_{31} , p_{43} , q_{31} , q_{43} , r_{31} , r_{43} et des constantes du problème.

$$\overrightarrow{V}_{M,4/1}^2 = \begin{pmatrix} -b.r_{31} \\ a.(r_{43} + r_{31}) \\ b.p_{31} - a.(q_{43} + q_{31}) \end{pmatrix}$$

5. En écrivant que $\overrightarrow{\Omega}_{4/1} = \overrightarrow{\Omega}_{4/1}^1 = \overrightarrow{\Omega}_{4/1}^2$ et que $\overrightarrow{V}_{M,4/1} = \overrightarrow{V}_{M,4/1}^1 = \overrightarrow{V}_{M,4/1}^2$, écrire différentes relations entre p_{21} , p_{42} , q_{21} , q_{42} , r_{21} , r_{42} , p_{31} , p_{43} , q_{31} , q_{43} , r_{31} , r_{43} .

$$\begin{cases} p_{42} + p_{21} = p_{43} + p_{31} \\ q_{42} + q_{21} = q_{43} + q_{31} \\ r_{42} + r_{21} = r_{43} + r_{31} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} -b.r_{21} = -b.r_{31} \\ -a.(r_{42} + r_{21}) = a.(r_{43} + r_{31}) \\ b.p_{21} + a.(q_{42} + q_{21}) = b.p_{31} - a.(q_{43} + q_{31}) \end{cases}$$

6. En déduire la forme du torseur cinématique du solide 4 par rapport au solide 1. La liaison équivalente entre le chariot 1 et la tête 4 est-elle une liaison normalisée ? Si oui, laquelle ?

On en déduit que $\begin{matrix} r_{21} = r_{31} \\ r_{41} = r_{43} + r_{31} = 0 \end{matrix}$.

$$V_{4/1} = \left\{ \begin{array}{c|c} p_{41} & u_{41} \\ q_{41} & 0 \\ 0 & w_{41} \end{array} \right\}_{(u, \vec{v}, \vec{w})}$$

On reconnaît le torseur cinématique d'une liaison linéaire rectiligne de normale (M, \vec{y}) et d'axe (M, \vec{x})

On va maintenant déterminer le mouvement de la tête.

7. Pour un solide S1 en translation par rapport à un solide S0, que vaut la vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega}_{S1/S0}$?

$$\overrightarrow{\Omega}_{S1/S0} = \vec{0}$$

8. En remarquant que l'imprimante complète comporte 3 systèmes identiques répartis à 120° les uns des autres, montrer que la tête d'impression est en translation par rapport au bâti suivant les 3 directions de l'espace.

La liaison équivalente entre la tête et le bâti est une liaison en série : glissière et linéaire rectiligne. Le vecteur vitesse de rotation est donc porté par \vec{u} et \vec{v} . Comme les 3 chariots sont disposés à 120°, le vecteur rotation est nul.

Partie 2 : Détermination de la commande des moteurs

L'objectif de cette partie est de déterminer les positions des chariots en connaissant la position de la tête d'impression souhaitée.

La forme de la pièce imprimée dépend de la trajectoire de la tête d'impression par rapport au bâti. La structure de l'imprimante impose que le mouvement de la tête 4 est une translation par rapport au bâti T. On adopte la modélisation simplifiée présentée sur la Figure 5.

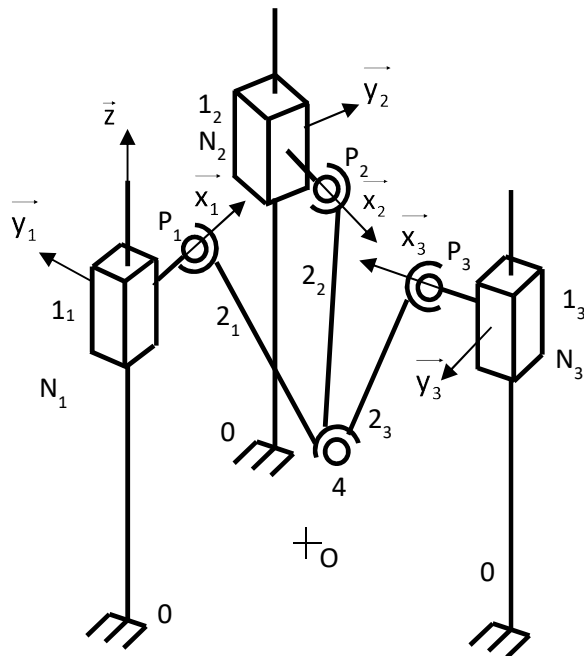


Figure 5 : Modélisation simplifiée de l'imprimante

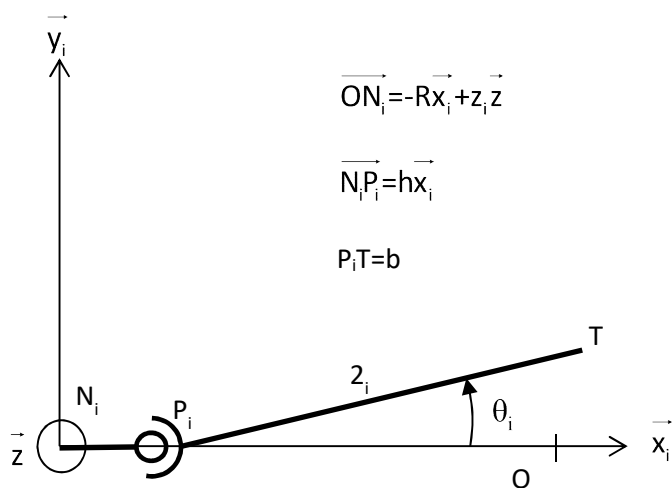


Figure 6 : Représentation dans le plan (\vec{x}_i, \vec{y}_i)

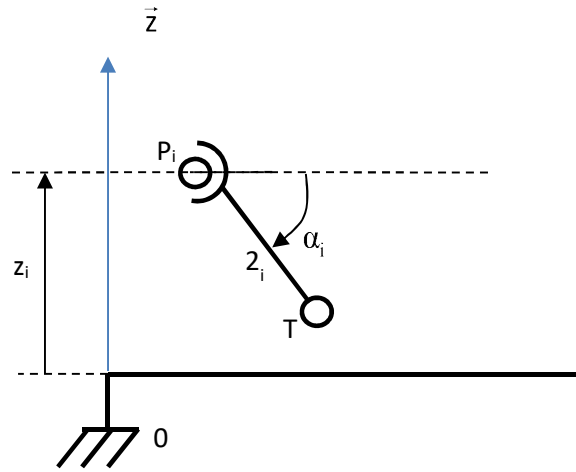


Figure 7 : Représentation dans le plan formé par \vec{Z} et la barre 2_i

On pose $\vec{OT} = x\vec{x}_i + y\vec{y}_i + z\vec{z}$.

9. Ecrire le vecteur \vec{OT} en passant par les points N_i et P_i .

$$\vec{OT} = \vec{ON}_i + \vec{N}_i\vec{P}_i + \vec{P}_i\vec{T}$$

10. Projeter le vecteur \vec{OT} dans la base $(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z})$ et écrire trois équations liant x , y et z d'une part et α_i , θ_i et z_i d'autre part.

$$\vec{OT} = \vec{ON}_i + \vec{N}_i\vec{P}_i + \vec{P}_i\vec{T} = (-R+h+b.\cos\alpha_i.\cos\theta_i)\vec{x}_i + b.\cos\alpha_i.\sin\theta_i\vec{y}_i + (z_i+b\sin\alpha_i)\vec{z}$$

$$\text{On en déduit : } \begin{cases} x = -R+h+b.\cos\alpha_i.\cos\theta_i \\ y = b.\cos\alpha_i.\sin\theta_i \\ z = z_i+b\sin\alpha_i \end{cases}$$

11. Montrer que l'on peut déterminer z_i en fonction de x , y et z .

$$\text{On a } \tan\theta_i = \frac{y}{x+R-h}, \cos\alpha_i = \frac{y}{b}\sin\theta_i \text{ et } z_i = z - b\sin\alpha_i. \text{ On peut donc déterminer } z_i \text{ en fonction de } x, y \text{ et } z.$$

Les z_i forment ainsi les hauteurs des chariots pour que la tête soit à la position programmée pour l'impression.

Partie 3 : Comportement vibratoire de l'imprimante

L'objectif de cette partie est de modéliser les phénomènes vibratoires et leur influence sur la qualité d'impression des pièces.

Le bâti de la machine est déformable et les mouvements des différentes pièces engendrent des vibrations. Ces vibrations du bâti peuvent engendrer des imprécisions de déplacement de la tête se traduisant par une mauvaise qualité de la pièce imprimée. On modélise l'imprimante comme une structure vibrante à un degré de liberté en déplacement horizontal. Un solide de masse M relié au bâti par un ensemble ressort (de raideur k) et amortisseur (de coefficient de frottement fluide f), se déplace en translation par rapport au bâti, sa position est repérée par la longueur x . Un solide de masse m se translate par rapport au solide de masse M (liaison glissière). La position du solide de masse m par rapport au solide de masse M est notée y (Figure 8). La longueur y représente le déplacement de la tête par rapport à la structure déformable de l'imprimante. L'action des moteurs et des courroies sont modélisées par deux forces F et $-F$ s'appliquant respectivement sur les solides de masse m et M . Le bâti est considéré comme immobile par rapport à un référentiel galiléen. Les données numériques sont : $M=2\text{kg}$, $m=50\text{g}$, $f=0,3 \text{ N.s/m}$, $k=10\,000 \text{ N/m}$.

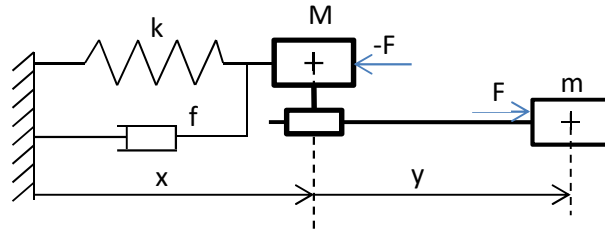


Figure 8 : Modélisation de la structure vibrante de l'imprimante

12. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique au solide de masse M et au solide de masse m.

$$M\ddot{x} = -kx - f\dot{x} - F \text{ et } m(\ddot{x} + \ddot{y}) = F$$

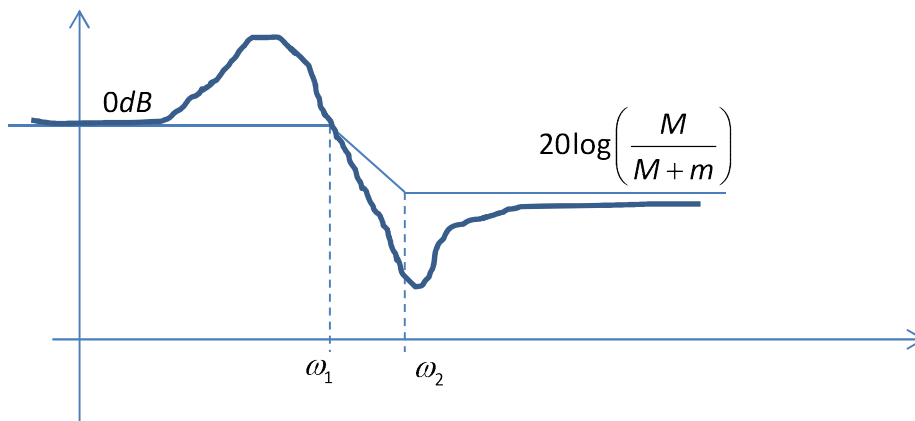
13. Mettre les équations dans le domaine de Laplace et déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{X(p)+Y(p)}{Y(p)}$

(On supposera que les conditions initiales sont nulles).

$$(Mp^2 + fp + k)X = -F \text{ et } mp^2(X+Y) = F$$

$$\text{On en déduit } \frac{X+Y}{Y} = \frac{Mp^2 + fp + k}{(M+m)p^2 + fp + k}$$

14. Tracer sur votre copie le diagramme asymptotique en gain du diagramme de Bode de la fonction H(p) précédente ainsi que l'allure du diagramme réel.

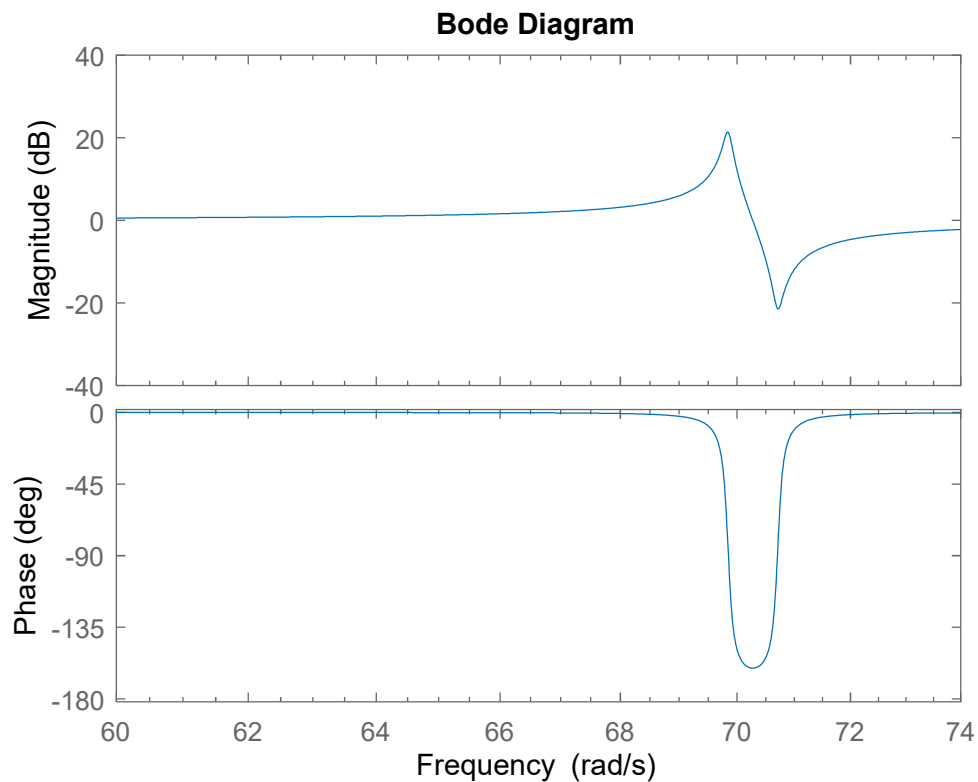


$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\xi_1 = \frac{f}{2\sqrt{k.M}} = 0,001 \text{ et } \xi_2 = \frac{f}{2\sqrt{k.(M+m)}} = 0,001$$

Antirésonance Résonance



15. La fonction de transfert présente une résonance pour une pulsation $\omega_r=70\text{rad/s}$ et présente un gain de 20dB. Quelle est l'amplitude de $x+y$ si y est sinusoïdale d'amplitude 0,1 mm et de pulsation 70 rad/s ? Quelle influence y a-t-il sur la pièce imprimée ?

$(x+y)_{\text{max}}=10 \times 0,1\text{mm}$. Il y a donc une imprécision de 1 mm.

16. Proposer un mode de pilotage de y pour éviter ce problème. Proposer un type de filtre et sa fonction de transfert.

Il faut ralentir la commande de manière à ne pas exciter la pulsation autour de 70 rad/s et ne pas provoquer de résonance.

Une autre solution est de filtrer la commande de y avec une filtre passe pas ou réjecteur de fréquence.