

Concours CPGE 2019

Corrigé de l'épreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

■ PARTIE I : Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)

1°) *Etude du cas particulier de la fonction S_1*

a) Pour tout réel $x > 0$, la série définissant $S_1(x)$ est géométrique de raison e^{-x} : elle converge donc si et seulement si $e^{-x} < 1$, soit $x > 0$, et on a donc :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xn} = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

b) Lorsque x tend vers 0, $S_1(x)$ tend vers $+\infty$.

Et comme on a $e^{-x} = 1 - x + o(x)$, d'où $1 - e^{-x} \sim x$ en 0, on a donc $S_1(x) \sim \frac{1}{x}$ en 0.

c) Lorsque x tend vers $+\infty$, $S_1(x)$ tend vers 1, et on a $S_1(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \sim e^{-x}$ en $+\infty$.

2°) *Etude du domaine de définition des fonctions S_α ($\alpha > 0$)*

a) Pour $x = 0$, on a $e^{-xn^\alpha} = 1$ et la série diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Pour $x < 0$, le terme général e^{-xn^α} tend vers $+\infty$, et la série diverge par le même argument.

b) Pour tout réel $x > 0$, posons : $u_n(x) = n^2 e^{-xn^\alpha}$, soit en posant $t = xn^\alpha$:

$$u_n(x) = n^2 e^{-xn^\alpha} = \frac{1}{x^{2/\alpha}} t^{2/\alpha} e^{-t}.$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, $t = xn^\alpha$ tend vers $+\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{2/\alpha} e^{-t} = 0$ d'après les croissances comparées des fonctions puissances et exponentielle. Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$.

Par conséquent, on a $e^{-xn^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Ceci assure la convergence de la série à termes positifs $\sum e^{-xn^\alpha}$ pour $x > 0$.

c) La série définissant $S_\alpha(x)$ converge si et seulement si $x > 0$ et S_α est définie sur $]0, +\infty[$.

3°) *Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)*

a) On remarque que : $\forall x \geq \varepsilon, 0 \leq e^{-xn^\alpha} \leq e^{-\varepsilon n^\alpha}$.

Et comme $\varepsilon > 0$, la série $\sum e^{-\varepsilon n^\alpha}$ converge d'après la question précédente.

Donc la série $\sum e^{-xn^\alpha}$ converge normalement, donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Par théorème, on sait que la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est continue. D'après ce qui précède, et d'après la continuité des fonctions $x \rightarrow e^{-xn^\alpha}$, on obtient la continuité de S_α sur tout intervalle $[\varepsilon, +\infty[$. Comme tout réel $x > 0$ appartient à un tel intervalle $[\varepsilon, +\infty[$, on en déduit que S_α est continue en tout réel $x > 0$, donc sur $]0, +\infty[$.

b) Si $0 < x \leq y$, on a $0 < x n^\alpha \leq y n^\alpha$, donc $e^{-x n^\alpha} \geq e^{-y n^\alpha}$, puis par sommation : $S_\alpha(x) \geq S_\alpha(y)$. Ainsi, la fonction S_α est décroissante sur son intervalle de définition $]0, +\infty[$.

On sait par théorème qu'une fonction monotone admet des limites, finies ou infinies, aux bornes de son intervalle de définition. Donc S_α admet des limites finies ou infinies en 0 et $+\infty$.

c) Pour $n = 0$, on a : $\forall x > 0, e^{-x n^\alpha} = 1$. Et pour $n \geq 1$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x n^\alpha} = 0$.

De plus, on a vu que la série $\sum e^{-x n^\alpha}$ converge normalement, donc uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Le théorème de double limite s'applique donc au voisinage de $+\infty$ et permet d'affirmer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x n^\alpha} = 1.$$

d) La série $\sum e^{-x n^\alpha}$ étant à termes positifs, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x > 0$:

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^\alpha} \geq \sum_{n=0}^N e^{-x n^\alpha}.$$

Puisque S_α admet une limite finie ou infinie en 0, on peut donc passer à la limite dans l'inégalité précédente, ce qui implique, pour tout $N \in \mathbb{N}$, que $\lim_{x \rightarrow 0} S_\alpha(x) \geq N + 1$.

Cette inégalité étant vérifiée pour tout entier naturel N , on a nécessairement $\lim_{x \rightarrow 0} S_\alpha(x) = +\infty$.

■ PARTIE II : Etude de la fonction S_2

4°) Recherche d'un équivalent de S_2 en 0

a) Pour $x > 0$ et pour $n \leq t \leq n + 1$, on a $e^{-x(n+1)^2} \leq e^{-x t^2} \leq e^{-x n^2}$, d'où par intégration :

$$e^{-x(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} e^{-x t^2} dt \leq e^{-x n^2}.$$

b) En sommant pour tout entier naturel n avec $x > 0$, il vient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x(n+1)^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-x t^2} dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^2}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$S_2(x) - 1 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x t^2} dt \leq S_2(x).$$

Enfin, en posant $u = t \sqrt{x}$ dans cette dernière intégrale, on a : $\int_0^{+\infty} e^{-x t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

D'après l'inégalité précédente et selon la valeur rappelée de cette intégrale, il vient enfin :

$$S_2(x) - 1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{x}} \leq S_2(x).$$

Soit encore, en transformant cette inégalité :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{x}} \leq S_2(x) \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{x}} + 1.$$

c) D'après cette inégalité, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} S_2(x) = +\infty$.

Et on a $S_2(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ en 0 car leur quotient tend vers 1 d'après l'encadrement suivant :

$$1 \leq \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} S_2(x) \leq 1 + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

5°) Recherche d'un équivalent de $S_2 - 1$ en $+\infty$

a) Pour tout réel $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $xn \leq xn^2$, donc $e^{-xn^2} \leq e^{-xn}$, d'où :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn}.$$

b) En calculant la somme de cette série géométrique, on obtient plus précisément en $+\infty$:

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn} = \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} e^{-x} = o(e^{-x}).$$

On a donc $S_2(x) = 1 + e^{-x} + o(e^{-x})$, ce qui implique $S_2(x) - 1 \sim e^{-x}$ en $+\infty$.

6°) Recherche d'une valeur approchée de $S_2(x)$

a) D'après l'inégalité 4.a) appliquée avec $x > 0$, on obtient pour tout entier naturel N :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^N e^{-x n^2} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x n^2} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \int_{n-1}^n e^{-x t^2} dt = \int_N^{+\infty} e^{-x t^2} dt.$$

b) A l'aide du changement de variables $u = x t^2$ dans cette dernière intégrale, on obtient :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^N e^{-x n^2} \leq \int_N^{+\infty} e^{-x t^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{N\sqrt{x}}$ pour $u \geq xN^2$, on en déduit pour tout $N \geq 1$ que :

$$S_2(x) - \sum_{n=0}^N e^{-x n^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{xN^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \leq \frac{1}{2Nx} \int_{xN^2}^{+\infty} e^{-u} du = \frac{e^{-xN^2}}{2Nx}.$$

c) Ce qui précède montre qu'on a pour $N \geq 1$: $\sum_{n=0}^N e^{-x n^2} \leq S_2(x) \leq \sum_{n=0}^N e^{-x n^2} + \frac{e^{-xN^2}}{2Nx}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'algorithme suivant donne donc un encadrement de $S_2(x)$ à ε près :

$$N := 1 ; S := 1 + e^{-x} ; \text{Erreur} := \frac{e^{-x}}{2x} ;$$

Tant que Erreur $> \varepsilon$ faire :

$$N := N + 1 ; S := S + e^{-xN^2} ; \text{Erreur} := \frac{e^{-xN^2}}{2Nx} ;$$

Ecrire N et S ;

d) Avec $x = 1$ et $\varepsilon = 10^{-7}$, on obtient $N = 4$ et $S = 1,38631860\dots$, d'où l'encadrement suivant :

$$1,3863186 \leq S_2(1) \leq 1,3863187.$$

■ PARTIE III : Etude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

7°) *Comparaison de deux intégrales*

a) Considérons pour $\alpha > 0$ et $u > 0$ la fonction $u \mapsto e^{-u} u^{\alpha-1}$.

Cette fonction est positive et continue sur $]0, +\infty[$ et elle est :

- équivalente en 0 à $u^{\alpha-1} = \frac{1}{u^{1-\alpha}}$, dont l'intégrale converge sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha > 0$.

- négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{u^2}$ (car $\lim_{+\infty} e^{-u} u^{\alpha+1} = 0$) dont l'intégrale converge sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

b) Une intégration par parties donne pour $0 < a < b$:

$$\int_a^b e^{-u} u^\alpha du = [-e^{-u} u^\alpha]_a^b + \alpha \int_a^b e^{-u} u^{\alpha-1} du.$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, il vient donc : $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$.

Et comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, on en déduit $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3 \Gamma(3) = 6$, ...

Et par récurrence immédiate, $\Gamma(n + 1) = n \Gamma(n) = n!$.

Ainsi, la fonction Γ réalise une extrapolation de la fonction factorielle à \mathbb{R}_+^* .

c) La fonction $t \mapsto u = x t^\alpha$, dont la réciproque est $t \mapsto \frac{u^{1/\alpha}}{x^{1/\alpha}}$, réalise un difféomorphisme de \mathbb{R}_+^*

dans \mathbb{R}_+^* , de sorte qu'en effectuant ce changement de variables dans l'intégrale $\Gamma(\alpha)$, on ne modifie ni la convergence, ni la valeur de cette intégrale. Comme $du = \alpha x t^{\alpha-1} dt$, il vient donc :

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = \int_0^{+\infty} e^{-x t^\alpha} (x t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1} \alpha x t^{\alpha-1} dt = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-x t^\alpha} dt.$$

Ainsi donc, l'intégrale $I(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$, et on a la relation :

$$\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha x^{\frac{1}{\alpha}} I(\alpha).$$

8°) *Recherche d'un équivalent de S_α en 0 ($\alpha > 0$)*

a) Pour $x > 0$ et pour $n \leq t \leq n + 1$, on a $e^{-x(n+1)^\alpha} \leq e^{-x t^\alpha} \leq e^{-x n^\alpha}$, d'où par intégration :

$$e^{-x(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} e^{-x t^\alpha} dt \leq e^{-x n^\alpha}.$$

En sommant pour tout entier naturel n avec $x > 0$, on obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x(n+1)^\alpha} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x t^\alpha} dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x n^\alpha}.$$

Soit encore $S_\alpha(x) - 1 \leq I(\alpha) \leq S_\alpha(x)$, d'où l'on tire compte tenu de la question précédente :

$$0 \leq S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{x^{1/\alpha}} \leq 1.$$

b) Comme $\frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{x^{1/\alpha}} \leq S_\alpha(x) \leq \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{x^{1/\alpha}} + 1$, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0} S_\alpha(x) = +\infty$.

Et on a $S_\alpha(x) \sim \frac{1}{\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{1}{x^{1/\alpha}}$ en 0 car leur quotient tend vers 1 d'après l'encadrement suivant :

$$1 \leq \frac{\alpha x^{1/\alpha}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} S_\alpha(x) \leq 1 + \frac{\alpha x^{1/\alpha}}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

9°) *Majoration d'une intégrale auxiliaire*

a) En reprenant le changement de variables fait à la question 7.c), on a pour tous $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = \alpha x^{1/\alpha} \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt.$$

b) En intégrant par parties, on a pour tous $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du.$$

Pour $u \geq x$, on a $\frac{1}{u} \leq \frac{1}{x}$, ce qui permet de majorer comme suit cette dernière intégrale :

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du = \int_x^{+\infty} \frac{1}{u} \left(e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} \right) du \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du.$$

Il en résulte qu'on a lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-2} du = o\left(\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du\right).$$

En reportant dans l'intégration par parties ci-dessus, on obtient donc lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du = e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1} + o\left(\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du\right).$$

On en déduit l'équivalence suivante lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \sim e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

c) Il résulte des sous-questions a) et b) qu'on a donc lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}} \int_x^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\alpha}-1} du \sim \frac{e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\alpha x^{1/\alpha}} = \frac{e^{-x}}{\alpha x} = o(e^{-x}).$$

10°) *Recherche d'un équivalent de S_α en $+\infty$ ($\alpha > 0$)*

a) En reprenant l'inégalité de la question 4.a), on obtient pour $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^n e^{-xt^\alpha} dt = \int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt.$$

b) Comme $\int_1^{+\infty} e^{-xt^\alpha} dt = o(e^{-x})$ d'après la question 9.c), on en déduit que :

$$S_\alpha(x) - 1 - e^{-x} = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-xn^\alpha} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-x}).$$

Il en résulte que $S_\alpha(x) - 1 \sim e^{-x}$ quand x tend vers $+\infty$.