# Concours EPITA – IPSA Épreuve de physique
# Détection des ondes gravitationnelles
# Corrigé de l'épreuve

## 1 Questions préliminaires

**1.1** G est la constante de gravitation universelle, r correspond à la distance OP et $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire de la direction radiale $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP}$

**1.2** Une force est conservative si le travail élémentaire peut s'écrire sous la forme δW = -dEp où Ep est l'énergie potentielle dont dérive la force. Pour la force de gravitation $\delta W = -G\dfrac{Mm}{r^2}dr$ soit $dE_P = G\dfrac{Mm}{r^2}dr$ qui donne après intégration $\boxed{E_P = -G\dfrac{Mm}{r}}$ en prenant Ep(r→ ∞) = 0.

**1.3** L'énergie mécanique $E_m$ du point P s'écrit $\boxed{E_m = E_C + E_P = \dfrac{1}{2}m\,v^2 - G\dfrac{Mm}{r}}$

**1.4** En appliquant le théorème de la puissance mécanique dans le référentiel lié à la surface de l'astre A, et supposé galiléen, on obtient $\dfrac{dE_m}{dt} = P_{NC}$ où $P_{NC}$ est la puissance des forces non conservatives qui s'appliquent au point P. En supposant ici que la seule force qui s'exerce sur P est la force de gravitation, on a $P_{NC} = 0$ et donc $E_m = cste$

**1.5** On utilise la conservation de l'énergie mécanique : $E_m(r=R) = E_m(r=\infty)$ .

Avec $E_m(r=\infty) = \dfrac{1}{2}v_\infty^2 = 0$ , en considérant que l'objet P s'échappe de l'influence de gravitationnelle de A (r→∞) avec un vitesse finale nulle $v_\infty = 0$.

On a donc $E_m(r=R) = \dfrac{1}{2}m v_\ell^2 - G\dfrac{Mm}{R} = 0$ soit $\boxed{v_\ell = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}}$

**1.6** La définition du rayon de Schwarzschild se traduit par $c^2 = \dfrac{2GM}{R_S}$ soit $\boxed{R_S = \dfrac{2GM}{c^2}}$ .

Bien que nous ne soyons pas dans le domaine de validité de la mécanique newtonienne, la formule obtenue correspond à l'expression du rayon de Schwarzschild donnée par la relativité générale...

**1.7** Il s'agit d'un trou noir…

## 2 Sources d'ondes gravitationnelles

**2.1** La puissance surfacique transportée par l'onde est associée au vecteur de Poynting $\boxed{\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}}$ . Pour une plane progressive sinusoïdale se propageant suivant la direction $\vec{u}$ ,

$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ , $(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct et $B_0 = \dfrac{E_0}{c}$ . On peut donc écrire que $\boxed{\vec{\Pi} = \dfrac{E_0^2}{c\mu_0}\cos^2(\omega t - kx)\vec{u}}$ …

**2.2** Vérifions que $\dfrac{c^3\omega^2}{G}h^2$ est bien homogène à une puissance surfacique $[F] = W \cdot m^{-2} = kg \cdot s^{-3}$

On constate que : $\left[\dfrac{c^3\omega^2}{G}h^2\right] = \left[\dfrac{c^3\omega^2}{G}\right] = m^3 \cdot s^{-3} \cdot s^{-2} \cdot \left(J \cdot m \cdot kg^{-2}\right)^{-1} = m^2 \cdot s^{-5} \cdot kg^2 \cdot J^{-1}$

Or $J = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ et donc $\left[\dfrac{c^3\omega^2}{G}h^2\right] = kg \cdot s^{-3}$ . On a donc bien $\left[\dfrac{c^3\omega^2}{G}h^2\right] = [F]$

**2.3**

**2.3.a** La puissance émise correspond à $P = \dfrac{E}{\tau}$ où $E = 10^{-4}$ $Mc^2$ est l'énergie libérée et $\tau$ la durée de l'événement. On trouve $\boxed{P = \dfrac{10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{10^{-2}} \simeq 2 \cdot 1O^{45}\ W}$

**2.3.b** Ce qui correspond à l'énergie lumineuse de près de $N = \dfrac{P}{L} = \dfrac{2 \cdot 10^{45}}{4 \cdot 10^{26}} = 5 \cdot 10^{18}$ étoiles… soit près de $10^9$ galaxies… Les énergies misent en jeu sont extrêmement élevées.

**2.3.c** La conservation de l'énergie impose que le flux $\Phi$ de F à travers une surface entourant la source des ondes gravitationnelles alors $\Phi = \text{cste} = P$ où P est la puissance émise par la source

En supposant le rayonnement isotrope et en choisissant une surface sphérique de rayon d centrée sur la source : $F 4\pi d^2 = P$ avec $F = \dfrac{c^3\omega^2}{G}h^2$ ce qui conduit à $\dfrac{c^3\omega^2}{G}h^2 4\pi d^2 = P$ soit $\boxed{h = \sqrt{\dfrac{P \cdot G}{4\pi c^3\omega^2}} \cdot \dfrac{1}{d}}$

On trouve :

$$h = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{45} \cdot 7\,10^{-11}}{4 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 27\,10^{24} \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10^{6}}}\frac{1}{5\,10^{23}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 10^{34}}{12 \cdot 10^{31}}}\frac{1}{5\,10^{23}} \simeq \frac{10\sqrt{10}}{5\,10^{23}} \simeq 6 \cdot 10^{-24}$$

soit une amplitude h de l'ordre de $10^{-23}$ pour un événement de ce type…

**2.3.d** On trouve $\Delta L = hL = 10^{-20}\,m$ ce qui est 5 ordres de grandeur plus faible que la taille d'un noyau atomique… L'effet d'une telle onde gravitationnelle est donc extrêmement faible.

## 3 Barres de Weber

**3.1** On applique le principe fondamental de la dynamique à la masse M d'abscisse $x_1$ dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Elle est soumise à la force de frottement fluide $\vec{f}_1 = -\alpha(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt})\vec{u}_x$ et à la force de rappel élastique proportionnelle à l'allongement : $\vec{F}_1 = k(x_2 - x_1 - \ell_0)\vec{u}_x$ .

Le principe fondamental s' écrit : $M\frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{u}_x = \vec{F}_1 + \vec{f}_1$

soit en projetant suivant Ox : $\boxed{M\frac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1 - \ell_0) - \alpha\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right)}$ (1)

**3.2** En procédant de façon analogue pour la masse d'abscisse $x_2$, on trouve :

$$M\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1 - \ell_0) + \alpha\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) \quad (2)$$

On fait la différence des équations (2) et (1) :

$$M\left(\frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{d^2x_1}{dt^2}\right) = -2k(x_2 - x_1 - \ell_0) - 2\alpha\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)$$

qui se réécrit avec $\xi = x_2 - x_1 - \ell_0$ comme $\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\frac{\alpha}{M}\frac{d\xi}{dt} + 2\frac{k}{M}\xi = 0$

Par identification : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}}}$ et $\boxed{\frac{\omega_0}{Q} = \frac{2\alpha}{M}}$ soit $\boxed{Q = \frac{\sqrt{kM}}{\sqrt{2}\alpha}}$

**3.3** Il faut que le régime transitoire soit terminé. La durée du régime est typiquement de l'ordre de quelques fois la constante de temps qui vaut en régime pseudopériodique (compte tenu de la valeur de Q donnée plus loin dans l'énoncé) $\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$

**3.4** L'expression de l'amplitude complexe de $\xi(t)$ est $\boxed{\underline{\xi}_m = \xi_m \exp(i\varphi)}$ .

On a également $\boxed{\underline{h}(t) = h_m \exp(i\omega t)}$

**3.5** En utilisant $\frac{d^2\underline{\xi}}{dt^2} = -\omega^2\underline{\xi}$ , $\frac{d\underline{\xi}}{dt} = i\omega\underline{\xi}$ et $\frac{d^2\underline{h}}{dt^2} = -\omega^2\underline{h}$

L'équation différentielle du système se réécrit en notation complexe comme :

$$\underline{\xi}_m \exp(i\omega t)\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}\right) = -\frac{1}{2}\ell_0\omega^2 h_m \exp(i\omega t)$$

qui donne $\boxed{\underline{\xi}_m = -\frac{1}{2}\frac{\ell_0\omega^2 h_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\frac{\omega_0}{Q}}}$

**3.6** On obtient : $\boxed{\xi_m = \frac{1}{2}\frac{\ell_0\omega^2 h_m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\frac{\omega_0^2}{Q^2}}}}$ et $\boxed{\tan\varphi = \frac{\omega\frac{\omega_0}{Q}}{\omega^2-\omega_0^2}}$

**3.7** Pour $Q \gg 1$, l'amplitude est maximale pour $\omega \simeq \omega_0$ et $\boxed{\xi_m = \frac{1}{2}Q\ell_0 h_m}$

**3.8** Le fait que les masses vibrent à la même amplitude et en opposition de phase se traduit par :

$x_1 = x_{1\,eq} - x_m\cos\omega t$ et $x_2 = x_{2eq} + x_m\cos\omega t$

A l'équilibre $x_{2eq}-x_{1eq}-\ell_0 = 0$, et comme $\xi = x_2-x_1-\ell_0 = 2x_m\cos\omega t$ on trouve que $\xi_m = 2x_m$

De plus $E_{C1} = \frac{1}{2}M\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}M\omega^2 x_m^2\sin^2\omega t$

$$E_{C1} = \frac{1}{2}M\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}M\omega^2 x_m^2\sin^2\omega t$$

et
$$E_P = \frac{1}{2}k\left(x_2-x_1-\ell_0\right)^2 = 2k\,x_m^2\cos^2\omega t$$

On en déduit l'énergie mécanique $E_m$ du système :

$$E_m = M\omega^2 x_m^2\sin^2\omega t+2\,k\,x_m^2\cos^2\omega t$$

Soit en prenant la moyenne : $E_{moyenne} = \langle E_m\rangle = \frac{1}{2}M\omega^2 x_m^2+k\,x_m^2$

et en utilisant le fait que $\omega \simeq \omega_0$, $\omega_0^2 = \frac{2k}{M}$, $E_{moyenne} = M\omega_0^2 x_m^2 = \frac{1}{4}M\omega_0^2\xi_m^2$

Puis enfin, en utilisant l'expression précédemment obtenue $\xi_m = \frac{1}{2}Q\ell_0 h_m$, on arrive à

$$\boxed{E_{moyenne} = \frac{1}{16}M\ell_0^2\omega_0^2 Q^2 h_m^2}$$

**3.9** L'énoncé nous invite à prendre comme critère $E_{moyenne} > k_B T$ ce qui conduit à une amplitude minimale $\boxed{h_{min} = \frac{4}{\ell_0\omega_0 Q}\sqrt{\frac{k_B T}{M}}}$

**3.10** $\boxed{h_{min} = \frac{4}{10^9}\sqrt{\frac{1{,}4\cdot10^{-23}\cdot300}{10^3}} \simeq \cdot10^{-20}}$

**3.11** On peut abaisser la température du capteur …

## 4 Interféromètre LIGO

**4.1** Les faisceaux sont en phase pour $d_1=d_2$, ce qui impose $\boxed{\delta = 0}$.
Lorsque $d_1 \neq d_2$, $\delta$ correspond au chemin supplémentaire effectué par le faisceau 2 par rapport au faisceau 1, soit à $2(d_2-d_1)$ ce qui permet d'écrire $\boxed{\delta = 2(d_2-d_1)}$.

**4.2** Écrivons les amplitudes complexes associées aux faisceaux (1) et (2) arrivant sur le détecteur :

$$\underline{A}_1 = A_0 \quad \text{et} \quad \underline{A}_2 = A_0 \exp(i\,2k(d_2-d_1)) \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{et} \quad A_0=\sqrt{\frac{P_0}{4S}}$$

On en déduit l'amplitude de l'onde résultante :

$$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = A_0[1 + \exp(i\,k\delta)]$$

et l'expression de l'intensité lumineuse résultante :

$$I = |\underline{A}|^2 = 2A_0^2[1 + \cos(k\delta)]$$

Puis en notant que $4A_0^2 = \dfrac{P_0}{S}$ et que $P = S\,I$, on obtient $\boxed{P = \dfrac{P_0}{2}[1 + \cos(k\delta)]}$

**4.3** Lors du passage de l'onde gravitationnelle $d_2-d_1=hL$ et donc $\delta = \delta_i+2hL$

Comme $P_{og} = \dfrac{P_0}{2}[1 + \cos(k\delta_0+2khL)]$ et $\cos(k\delta_i+2khL)=\cos(k\delta_i) - 2khL\sin(k\delta_i)$

on obtient $P_{og} = \dfrac{P_0}{2}[1 + \cos(k\delta_i)] - P_0 kLh\sin(k\delta_i)$

et donc $\boxed{\delta P_{og} = -P_0 kLh\sin(k\delta_i)}$

**4.4** On cherche à détecter une très faible variation de puissance provoquée par le passage de l'onde gravitationnelle. Si la puissance du faisceau du laser n'est pas stable et fluctue, le signal associé à une onde risque d'être noyé dans le bruit associé aux fluctuations de l'intensité du faisceau.

**4.5** La puissance lumineuse P étant proportionnelle au nombre de photons N du faisceau : $P = \dfrac{Nh\nu}{\Delta t}$. On a donc $\dfrac{\delta P_{BP}}{P} = \dfrac{\sqrt{N}}{N} = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$ soit $\delta P_{BP} = \dfrac{P}{\sqrt{N}} = \sqrt{\dfrac{P h_P \nu}{\Delta t}}$

On en déduit que $\boxed{\delta P_{BP} = \sqrt{\dfrac{h_P \nu P_0[1 + \cos(k\delta_i)]}{2\Delta t}}}$

**4.6** Le signal associé à l'onde doit vérifier $|\delta P_{og}| > \delta P_{BP}$ soit

$$P_0 kLh|\sin(k\delta_i)|>\sqrt{\frac{h_P \nu P_0[1 + \cos(k\delta_i)]}{2\Delta t}}$$

On en déduit l'amplitude minimale de l'onde $\boxed{h > h_{min} = \dfrac{\lambda}{2\pi L}\left(\dfrac{h_P\nu}{2P_0\Delta t}\,\dfrac{[1 + \cos(k\delta_i)]}{\sin^2(k\delta_i)}\right)^{\frac{1}{2}}}$

**4.7** En notant que $\dfrac{1 + \cos(k\delta_i)}{\sin^2(k\delta_i)} = \dfrac{1}{1 - \cos(k\delta_i)}$, la sensibilité est maximale quand $\cos(k\delta_i) = -1$, (h est alors minimale)… ce qui correspond à $\boxed{k\delta_i = \pi+2p\pi}$.

L'interféromètre est donc réglé sur la frange noire de la figure d'interférence. Intuitivement, on comprend qu'un signal faible est plus facilement détectable sur un fond sombre que sur un fond lumineux…

En prenant $k\delta_i = \pi+\varepsilon$ , on trouve $\dfrac{1 + \cos(k\delta_i)}{\sin^2(k\delta_i)} \simeq \dfrac{1 - (1-\frac{1}{2}\varepsilon^2)}{\sin^2(\varepsilon)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{1}{2}$

On trouve donc $\boxed{h_{min} = \dfrac{\lambda}{4\pi L}\left(\dfrac{h_P \nu}{P_0 \Delta t}\right)^{\frac{1}{2}}}$

**4.8** $\boxed{h_{min} = \dfrac{10^{-6}}{12\cdot 10^5}\left(\dfrac{7\,10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{10^{-6}\cdot 200\cdot 10^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0{,}8\cdot 10^{-12}\left(1{,}2\cdot 10^{-18}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq 10^{-21}}$

**4.9** Les barres de Weber fonctionnent dans une plage de fréquence très étroite située près du mode propre de vibration de la barre.
Les interféromètres couvrent une plage de fréquences de plusieurs décades… De plus la taille effective (distance L) est beaucoup plus grande que les barres de Weber ce qui permet d'obtenir une sensibilité plus élevée.

**Bibliographie :**


- B.F. Schutz A first course in general relativity, Cambridge University Press
- http://public.virgo-gw.eu/language/fr/
- https://www.ligo.caltech.edu/
- B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) Phys. Rev. Lett. 116, 061102
- Gravitational Wave Astronomy, K. Kokotas, Reviews in Modern Astrophysics, 20, 140 (2008) (arXiv : 0809.1602)
- R. Gouaty. Analyse de la sensibilité du détecteur d'ondes gravitationnelles Virgo. Physique des Hautes Énergies - Expérience [hep-ex]. Université de Savoie, 2006. Français. <tel-00112568>