# E.P.I.T.A. 2017

## Corrigé de l'épreuve optionnelle de mathématiques (2h)

## PARTIE I : Exemples de matrices nilpotentes

a) On vérifie facilement que $A^2 = B^2 = 0$, de sorte que $A$ et $B$ sont nilpotentes d'indice 2.

b) On obtient facilement :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit aussitôt que $(A+B)^{2k} = (A+B)^2$, et $(A+B)^{2k+1} = (A+B)^3 = A + B$.
Ainsi, $A + B$ n'est pas nilpotente.

c) Un rapide calcul donne maintenant :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit aussitôt que $(AB)^k = AB$, et $(BA)^k = BA$.
Ainsi, $AB$ et $BA$ ne sont pas nilpotentes.

d) L'ensemble $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes n'est pas stable par addition (ni par produit).
Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ni une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

## PARTIE II : Une forme réduite des matrices nilpotentes

2°) *Une propriété de l'indice de nilpotence*

a) Si $f$ est un endomorphisme nilpotent $f$ d'indice $p$ de $\mathbb{R}^n$, et si $f^{p-1}(e_1) \neq 0$, montrons que la famille $\left(f^{p-1}(e_1),\ \dots,\ f^2(e_1),\ f(e_1),\ e_1\right)$ est libre.

Partons d'une combinaison linéaire nulle de cette famille, puis composons cette dernière par les puissances successives de $f$ en tenant compte de $f^p = 0$ :

$$\begin{aligned}
\lambda_{p-1} f^{p-1}(e_1) + \lambda_{p-2} f^{p-2}(e_1) + \quad \dots \quad + \lambda_2 f^2(e_1) + \lambda_1 f(e_1) + \lambda_0\, e_1 &= 0 \\
\lambda_{p-2} f^{p-1}(e_1) + \ \dots\ + \lambda_2 f^3(e_1) + \lambda_1 f^2(e_1) + \lambda_0 f(e_1) &= 0 \\
\ddots \qquad & \\
\lambda_1 f^{p-1}(e_1) + \lambda_0 f^{p-2}(e_1) &= 0 \\
\lambda_0 f^{p-1}(e_1) &= 0
\end{aligned}$$

Comme $f^{p-1}(e_1) \neq 0$, on a en remontant ces équations que $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, etc.
Ainsi, la famille $\left(f^{p-1}(e_1),\ \dots,\ f^2(e_1),\ f(e_1),\ e_1\right)$ est libre, ce qui implique $p \leq n$.

b) Si $f$ est nilpotent d'indice $p$, on a $f^p = 0$, et comme $p \leq n$, on a *a fortiori* $f^n = 0$.
Inversement, si $f^n = 0$, alors $f$ est bien nilpotent, ce qui établit l'équivalence proposée.

3°) *Construction d'une base adaptée à un endomorphisme nilpotent : cas où $n = 3$*
a) Si $f$ est nilpotent d'indice $p = 3$ et si $f^2(e_1) \neq 0$, il résulte de la question 2 que la famille $\left(f^2(e_1),\ f(e_1),\ e_1\right)$ est libre, et donc forme une base de $\mathbb{R}^3$.
Dans cette base, la matrice de $f$ est la suivante, triangulaire avec des zéros sur la diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Si $f$ est nilpotent d'indice 2, on a $f^2 = f \circ f = 0$, donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Il en résulte que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f))$, et comme $f$ est non nul (sinon il serait nilpotent d'indice 1), on a plus précisément $1 \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f))$.
Comme le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$, l'unique possibilité est d'avoir $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.
Comme $f^2(e_1) = 0$, on voit que $f(e_1) \in \mathrm{Ker}(f)$ et comme c'est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$ on peut compléter $f(e_1)$ en base de $\mathrm{Ker}(f)$ à l'aide d'un second vecteur $e_3$.

Montrons maintenant que la famille $(f(e_1),\ e_1,\ e_3)$ est libre.
Partons d'une combinaison linéaire nulle : $\alpha\, f(e_1) + \beta\, e_1 + \gamma\, e_3 = 0$.
Comme $f^2 = 0$, on a $\beta\, f(e_1) = 0$ en composant par $f$, et comme $f(e_1) \neq 0$, on a $\beta = 0$.
Il reste donc $\alpha\, f(e_1) + \gamma\, e_3 = 0$ et comme il s'agit d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$, donc d'une famille libre, on obtient $\alpha = \gamma = 0$.
Ainsi, la famille $(f(e_1),\ e_1,\ e_3)$ est libre, et donc forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Dans cette base, la matrice de $f$ est la suivante, triangulaire avec des zéros sur la diagonale :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

4°) *Construction d'une base adaptée à un endomorphisme nilpotent : cas général*
On considère dans cette question un endomorphisme nilpotent $f$ d'indice $p$ de $\mathbb{R}^n$.
a) Lorsque $x \in \mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right)$, on a $f^{k-1}(x) = 0$, donc $f^k(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}\left(f^k\right)$.
Pour $1 \leq k \leq p$, on a donc l'inclusion $\mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right) \subset \mathrm{Ker}\left(f^k\right)$.
De plus, le vecteur $f^{p-k}(e_1)$ appartient à $\mathrm{Ker}\left(f^k\right)$ car $f^k\left(f^{p-k}(e_1)\right) = f^p(e_1) = 0$.
Mais il n'appartient pas à $\mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right)$ car $f^{k-1}\left(f^{p-k}(e_1)\right) = f^{p-1}(e_1) \neq 0$.
Ainsi, l'inclusion du sous-espace $\mathrm{Ker}\left(f^k\right)$ dans le sous-espace $\mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right)$ est stricte.

b) Si $x \in \mathrm{Ker}\left(f^k\right)$, on a $f^k(x) = 0$, donc $f^{k-1}(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right)$.
Ainsi, l'image par $f$ du sous-espace $\mathrm{Ker}\left(f^k\right)$ est incluse dans $\mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right)$.

c) On considère une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est strictement inclus dans $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ on peut compléter la famille libre $\mathcal{B}_1$ en base de $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ à l'aide d'une famille $\mathcal{B}_2$.

Plus généralement, supposons que $\mathcal{B}_1 \bigcup ... \bigcup \mathcal{B}_{k-1}$ est une base de $\mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right)$. Comme $\mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right)$ est strictement inclus dans $\mathrm{Ker}\left(f^{k}\right)$, on peut compléter de même la famille libre $\mathcal{B}_1 \bigcup ... \bigcup \mathcal{B}_{k-1}$ en base de $\mathrm{Ker}\left(f^{k}\right)$ à l'aide d'une famille $\mathcal{B}_k$.
Ainsi donc, $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2 \bigcup ... \bigcup \mathcal{B}_p$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathbb{R}^n$.

d) Comme l'image par $f$ du sous-espace $\mathrm{Ker}\left(f^{k}\right)$ est incluse dans le sous-espace $\mathrm{Ker}\left(f^{k-1}\right)$, les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ ont une image nulle, ceux de $\mathcal{B}_2$ ont une image dans $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1)$, et à la fin, ceux de $\mathcal{B}_p$ ont une image dans $\mathrm{Ker}\left(f^{p-1}\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{B}_1 \bigcup ... \bigcup \mathcal{B}_{p-1}\right)$, de sorte que la matrice par blocs de $f$ dans la base $\mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2 \bigcup ... \bigcup \mathcal{B}_p$ s'écrit comme suit :

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c|c} O & M_{12} & \cdots & M_{1\,p} \\ \hline O & O & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & M_{p-1\,p} \\ \hline O & O & \cdots & O \end{array}\right).$$

On remarque qu'elle est triangulaire avec des zéros sur la diagonale.
Ainsi, toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire avec des zéros sur sa diagonale.

---

5°) *Etude de la réciproque du résultat précédent*
a) Soit inversement une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & \cdots & t_{1\,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $\det(X\, I_n - T) = X^n$.

b) D'après le théorème de Caylay-Hamilton, on sait que le polynôme caractéristique d'une matrice (ou d'un endomorphisme) annule celle-ci, de sorte qu'on a ici $T^n = 0$.
Ainsi, toute matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire à diagonale nulle, et réciproquement, toute matrice triangulaire à diagonale nulle est nilpotente.

---

## PARTIE III : Dimension maximale d'un sous-espace $\mathcal{N}$ de $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$

6°) *Matrices symétriques réelles et matrices nilpotentes*
a) On sait que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormale.
Si $M$ est symétrique réelle, il existe donc une matrice inversible $P$ (qu'on peut donc choisir orthogonale) telle que $P^{-1}\, M\, P = D$ est diagonale.
Si $M$ est nilpotente d'indice $p$, on a alors $M^p = \left(P\, D\, P^{-1}\right)^p = P\, D^p\, P^{-1} = 0$.
Quitte à multiplier par $P^{-1}$ à gauche et par $P$ à droite, on a $D = 0$, puis $M = P\, D\, P^{-1} = 0$.

b) Si $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel constitué de matrices nilpotentes, ce qui précède montre que $\mathcal{N} \bigcap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$, de sorte que la somme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{N}$ est directe.
Et comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{N} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la considération des dimensions de ces sous-espaces donne $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{N}) \leq \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Comme il est facile de voir que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$, il en résulte que :

$$\dim(\mathcal{N}) \leq n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

c) L'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices triangulaires supérieures avec des zéros sur la diagonale est clairement stable par combinaison linéaire, et c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont une base est formée des $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices $\left(E_{i\,j}\right)_{i<j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Il s'agit donc d'un sous-espace de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
D'après la question 5, ces matrices triangulaires supérieures avec des zéros sur la diagonale sont nilpotentes, de sorte que $\mathcal{N}$ constitue bien un sous-espace de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ formé de matrices nilpotentes. Ceci prouve que la majoration obtenue en 6.b) est optimale.

---

## PARTIE IV : Caractérisation de Vect($\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$) à l'aide de la trace

7°) *Trace d'une matrice nilpotente*
a) L'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Tr}(M) \in \mathbb{R}$ est clairement linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'on a pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i\,i} + \mu b_{i\,i}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i\,i} + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i\,i} = \lambda \,\mathrm{Tr}(A) + \mu \,\mathrm{Tr}(B).$$

Et comme la trace va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, c'est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan, le noyau de la Trace est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc un sous-espace de dimension $n^2 - 1$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Si une matrice $M$ est nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire à éléments diagonaux nuls, de sorte que sa trace est nulle, ce qui établit l'inclusion $\mathcal{N}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
Comme Ker(Tr) est un sous-espace contenant les matrices nilpotentes, il contient donc toutes leurs combinaisons linéaires, d'où l'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

---

8°) *Etude de l'inclusion réciproque : cas où $n = 2$*
a) Un simple calcul donne $E_{12}^2 = 0$, $E_{21}^2 = 0$ et $N^2 = 0$ : ces trois matrices sont nilpotentes.

b) Une matrice (2, 2) de trace nulle s'écrit alors comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (a+b) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (c-a) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= a\,N + (a+b)\,E_{12} + (c-a)\,E_{21}.$$

c) Toute matrice (2, 2) de trace nulle est donc combinaison linéaire des matrices nilpotentes $N$, $E_{12}$, $E_{21}$, ce qui établit que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{N}_2(\mathbb{R}))$.
L'autre inclusion ayant été établie à la question 7, on a donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_2(\mathbb{R})) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

---

9°) *Etude de l'inclusion réciproque : cas général*
a) Pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$, on vérifie facilement que $E_{i\,j}^2 = 0$.
De même, pour $2 \leq i \leq n$, un calcul simple donne $N_i^2 = 0$.

b) Formons une combinaison linéaire nulle des $n^2 - n$ matrices $E_{i\,j}$ pour $1 \le i,\ j \le n$ et $i \ne j$ et des $n-1$ matrices $N_i = E_{11} - E_{1\,i} + E_{i\,1} - E_{i\,i}$ pour $2 \le i \le n$ :

$$\sum_{i=2}^{n} \lambda_i\, N_i + \sum_{i \ne j} \mu_{i\,j}\, E_{i\,j} = \begin{pmatrix} \lambda_2 + \ \dots\ + \lambda_n & \mu_{12} - \lambda_2 & \mu_{13} - \lambda_3 & \cdots & \mu_{1\,n} - \lambda_n \\ \mu_{21} + \lambda_2 & -\lambda_2 & \mu_{23} & & \mu_{2\,n} \\ \mu_{31} + \lambda_3 & \mu_{32} & -\lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mu_{n-1\,n} \\ \mu_{n\,1} + \lambda_n & \mu_{n\,2} & \cdots & \mu_{n\,n-1} & -\lambda_n \end{pmatrix} = 0.$$

En observant la diagonale, on obtient $\lambda_2 = \lambda_3 = \ \dots\ = \lambda_n = 0$.

En observant les autres coefficients, on voit alors que $\mu_{i\,j} = 0$ pour $i \ne j$.

Ainsi, ces $\left(n^2 - n\right) + (n-1) = n^2 - 1$ matrices nilpotentes sont indépendantes.

Ceci implique que $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))) \ge n^2 - 1$.

c) D'après la question 7, on sait que $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) \subset \mathrm{Ker(Tr)}$. On en déduit alors que $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))) \le \dim(\mathrm{Ker(Tr)}) = n^2 - 1$. Il en résulte que $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))) = n^2 - 1$. L'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) \subset \mathrm{Ker(Tr)}$ et l'égalité de leurs dimensions permettent de conclure à l'égalité de ces deux sous-espaces, soit : $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{Ker(Tr)}$.

d) Considérons une matrice $M = \left(m_{i\,j}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i\,i} = 0$, la matrice $M$ appartient à $\mathrm{Ker(Tr)} = \mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))$.

Dans ce cas, notons qu'on a $m_{11} = -m_{22} - m_{33} - \ \dots\ - m_{n\,n}$.

Comme la famille $\mathcal{F}_n$ est une famille libre de $n^2 - 1$ matrices nilpotentes indépendantes, c'est donc une base de $\mathrm{Vect}(\mathcal{N}_n(\mathbb{R}))$ et il existe des scalaires $\lambda_2, \ \dots, \lambda_n$ et $\mu_{i\,j}$ pour $i \ne j$ tels qu'on ait $M = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i\, N_i + \sum_{i \ne j} \mu_{i\,j}\, E_{i\,j}$, soit :

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1\,n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2\,n} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n\,1} & m_{n\,2} & m_{n\,3} & \cdots & m_{n\,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 + \ \dots\ + \lambda_n & \mu_{12} - \lambda_2 & \mu_{13} - \lambda_3 & \cdots & \mu_{1\,n} - \lambda_n \\ \mu_{21} + \lambda_2 & -\lambda_2 & \mu_{23} & & \mu_{2\,n} \\ \mu_{31} + \lambda_3 & \mu_{32} & -\lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mu_{n-1\,n} \\ \mu_{n\,1} + \lambda_n & \mu_{n\,2} & \cdots & \mu_{n\,n-1} & -\lambda_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit immédiatement que :

- pour $2 \le i \le n$, $\lambda_i = -m_{i\,i}$.
- pour $2 \le j \le n$, $\mu_{1\,j} = m_{1\,j} - m_{j\,j}$.
- pour $2 \le i \le n$, $\mu_{i\,1} = m_{i\,1} + m_{i\,i}$.
- pour $2 \le i,\ j \le n$ et $i \ne j$, $\mu_{i\,j} = m_{i\,j}$.