E.P.I.T.A. 2017

Corrigé de l'épreuve de mathématiques (3 h) - Filières PT-TSI

■ PARTIE I : Etude de la fonction f

1°) *Etude de l'intégrale* $f(0)$

a) On a $\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \cos(x)$, et cette fonction n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

b) L'intégrale $f(0) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{d}t$ est donc divergente et f n'est pas définie pour $\alpha = 0$.

2°) *Etude de l'intégrale* $f(\alpha)$ *pour* $\alpha \geq 2$

a) On sait que $\sin(t) \sim t$ quand t tend vers 0, donc $\frac{\sin(t)}{t^\alpha} \sim \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ quand t tend vers 0.

b) Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha-1}}$ diverge pour $\alpha - 1 \geq 1$, donc pour $\alpha \geq 2$, on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge pour $\alpha \geq 2$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge donc aussi pour $\alpha \geq 2$, et f n'est pas définie pour $\alpha \geq 2$.

3°) *Etude d'une intégrale auxiliaire pour* $0 < \alpha < 2$

a) Lorsque t tend vers 0, la fonction φ_α a l'équivalent suivant :

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}} \sim \frac{t^2/2}{t^{\alpha+1}} = \frac{1}{2\,t^{\alpha-1}}.$$

Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha-1}}$ converge pour $\alpha - 1 < 1$, donc pour $\alpha < 2$, on en déduit que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ converge pour $\alpha < 2$.

b) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}}$ converge pour $\alpha + 1 > 1$, donc pour $\alpha > 0$.

Comme $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{2}{t^{\alpha+1}}$, on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ converge pour $\alpha > 0$.

c) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ est donc convergente si $0 < \alpha < 2$ puisque les deux intégrales $\int_0^1 \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ convergent alors.

4°) *Convergence de l'intégrale $f(\alpha)$ pour* $0 < \alpha < 2$

a) Par intégration par parties sur $[a, b]$ avec $b > a > 0$, il vient :

$$\int_a^b \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t^\alpha}\right]_a^b + \alpha \int_a^b \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt.$$

b) Comme $\frac{1-\cos(t)}{t^\alpha} \sim \frac{t^{2-\alpha}}{2}$, on en déduit que $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^\alpha} = 0$ pour $0 < \alpha < 2$.

c) Comme $0 \le \frac{1-\cos(t)}{t^\alpha} \le \frac{2}{t^\alpha}$, on en déduit que $\lim_{t\to+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^\alpha} = 0$ pour $0 < \alpha < 2$.

d) Lorsque a tend vers 0 et b tend vers $+\infty$, le crochet ci-dessus tend vers 0, tandis que l'intégrale $\int_a^b \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt$ converge vers $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt$.

Donc l'intégrale $f(\alpha)$ converge pour $0 < \alpha < 2$, et on a l'égalité :

$$f(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt.$$

5°) *Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2*

a) D'après les développements limités usuels, on a : $\lim_{t\to 0} \varphi_1(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la fonction φ_1 est continue sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi_1(0) = 1/2$.

b) Comme $\varphi_1(0) > 0$, l'équation $\varphi_1(t) = 0$ équivaut à $\cos(t) = 1$, soit $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ avec $t \neq 0$.
Pour $t \in [0, \pi]$, l'équation $\varphi_1(t) = 0$ n'a donc pas de solution.
Comme φ_1 est positive et ne s'annule pas sur $[0, \pi]$, on a $\varphi_1(t) > 0$ pour tout t dans $[0, \pi]$.
Le minimum de la fonction continue φ_1 sur le segment $[0, \pi]$ est donc atteint en un réel t_0 de $[0, \pi]$ et c'est un réel strictement positif $\mu = \varphi_1(t_0) > 0$.

c) Puisque la fonction intégrée ci-dessous est positive, son intégrale sur $[0, +\infty[$ est supérieure à son intégrale sur $[0, \pi]$ et on a compte tenu de la minoration obtenue pour φ_1 :

$$f(\alpha) \ge \alpha \int_0^\pi \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt = \alpha \int_0^\pi \frac{1-\cos(t)}{t^2}\, \frac{dt}{t^{\alpha-1}} \ge \alpha\,\mu \int_0^\pi \frac{dt}{t^{\alpha-1}} \ge \alpha\,\mu\, \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

d) Cette dernière minoration tend vers $+\infty$ quand α tend vers 2.
Il en résulte que $\lim_{\alpha\to 2} f(\alpha) = +\infty$.

■ Partie II : Calcul de l'intégrale $f(1)$

6°) *Calcul d'intégrales auxiliaires*

a) La fonction $t \longrightarrow \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et elle se prolonge par continuité par la valeur $2n+1$ en $t = 0$. Ainsi, l'intégrale I_n existe bien.

b) On a clairement $I_0 = \frac{\pi}{2}$, et d'après les formules de trigonométrie usuelle :

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)}{\sin(t)}\, dt = \int_0^{\pi/2} 2\cos(2nt)\, dt = 0.$$

On en déduit immédiatement que la suite $n \longrightarrow I_n$ est constante, égale à $\pi/2$.

c) Selon les développements limités usuels, on a : $t - \sin(t) \sim t^3 / 6$ quand t tend vers 0, et :

$$\psi(t) = \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin(t)}{t \sin(t)} \sim \frac{t^3/6}{t^2} = \frac{t}{6}.$$

Il en résulte que $\lim_{t \to 0} \psi(t) = 0$.
Ainsi, la fonction φ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en posant $\psi(0) = 0$.

d) Compte tenu de l'égalité $I_n = \frac{\pi}{2}$, puis en posant $u = (2n+1)t$, il vient maintenant :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right) \sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

7°) *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe C^1*

a) Puisque g est de classe C^1 sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^{\pi/2} g(t) \sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t = \left[-g(t)\,\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\pi/2} g'(t)\,\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Il en résulte que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} g'(t) \cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t.$$

b) L'inégalité de la moyenne donne :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} g'(t) \cos((2n+1)t)\,\mathrm{d}t\right| &\le \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} |g'(t)|\,|\cos((2n+1)t)|\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} |g'(t)|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

D'après cette majoration, cette intégrale tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Ainsi, u_n est somme de deux termes qui tendent vers 0, et tend vers 0.

8°) *Calcul de l'intégrale $f(1)$*

a) Pour $0 < t \le \frac{\pi}{2}$, la dérivée ψ' de la fonction ψ est égale à :

$$\psi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right) = -\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} + \frac{1}{t^2} = \frac{\sin^2(t) - t^2\cos(t)}{t^2 \sin^2(t)}.$$

b) En exploitant les développements limités usuels, il vient :

$$\sin^2(t) - t^2\cos(t) = \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)\right)^2 - t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = \frac{t^4}{6} + o(t^4) \sim \frac{t^4}{6}.$$

Comme $t^2 \sin^2(t) \sim t^4$, on en déduit que $\psi'(t)$ tend vers $\frac{1}{6}$ quand t tend vers 0.

Comme ψ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, clairement de classe C^1 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, et comme ψ' admet pour limite 1/6 quand t tend vers 0, il résulte du théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 que ψ est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\psi'(0) = \frac{1}{6}$.

c) Le résultat de la question 7° appliqué à la fonction ψ, qui est bien de classe C^1, donne :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \psi(t) \sin((2\,n+1)\,t)\,\mathrm{d}t \;=\; 0.$$

En remplaçant u_n par son expression obtenue au 6°, on a donc :

$$\frac{\pi}{2} - \lim_{n \to +\infty} \int_0^{(2\,n+1)\,\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u \;=\; 0.$$

D'où finalement :

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \lim_{n \to +\infty} \int_0^{(2\,n+1)\,\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u \;=\; \frac{\pi}{2}.$$
